Diplomado Mathematiké

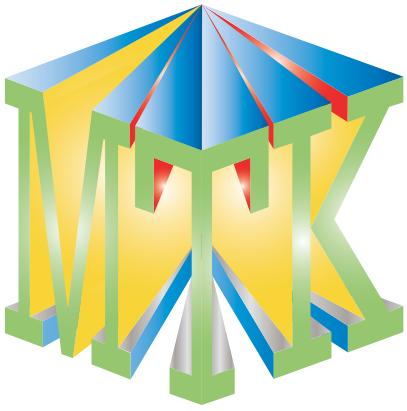
Certificación de Profesores de Matemáticas

2017-2018

Módulo II

Dinámica Básica del Sistema de Numeración Decimal

Material de Trabajo



Mathematiké

Una Forma Integral, Inteligente y Creativa de Aprender Matemáticas

Aritmética

Pre Escolar

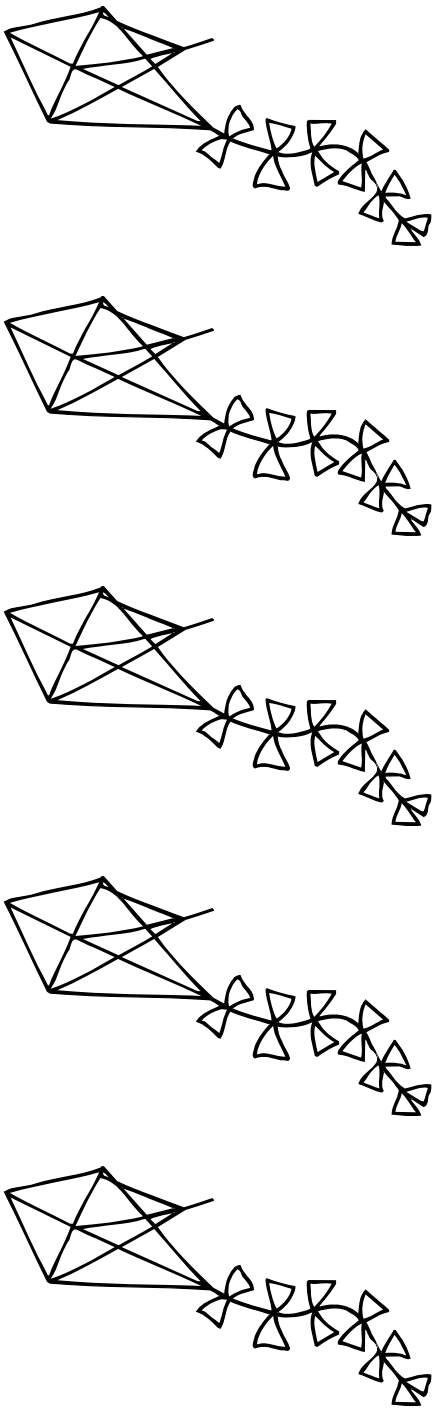
Segundo Grado



MORENO

Correspondencia Uno a Uno. Hoja 1

Une con una línea cada niño con su papalote. Colorea cada papalote de diferentes colores.





El Número 3

Dibuja 3 elementos y remarca los números, completa la plana.

3

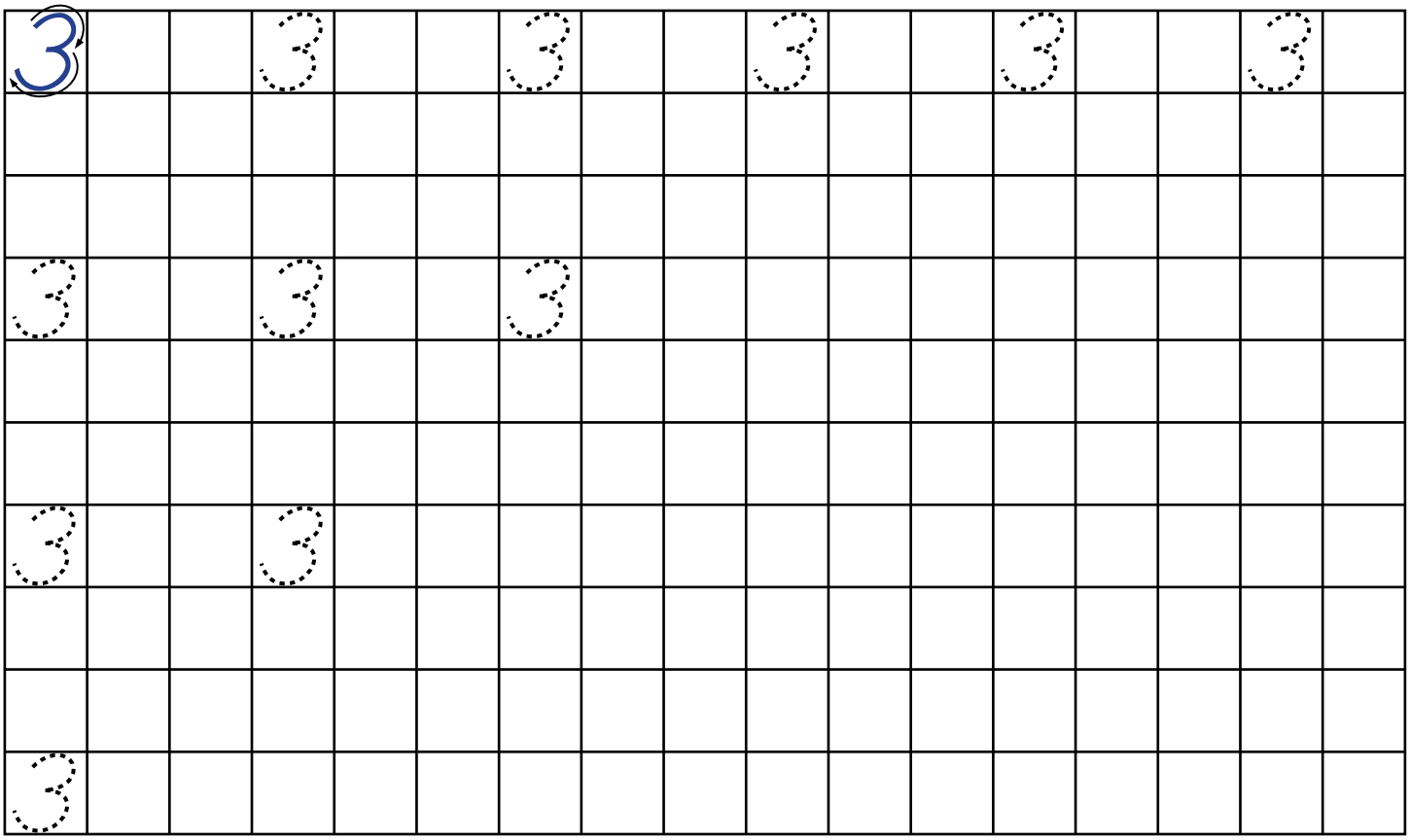
tres

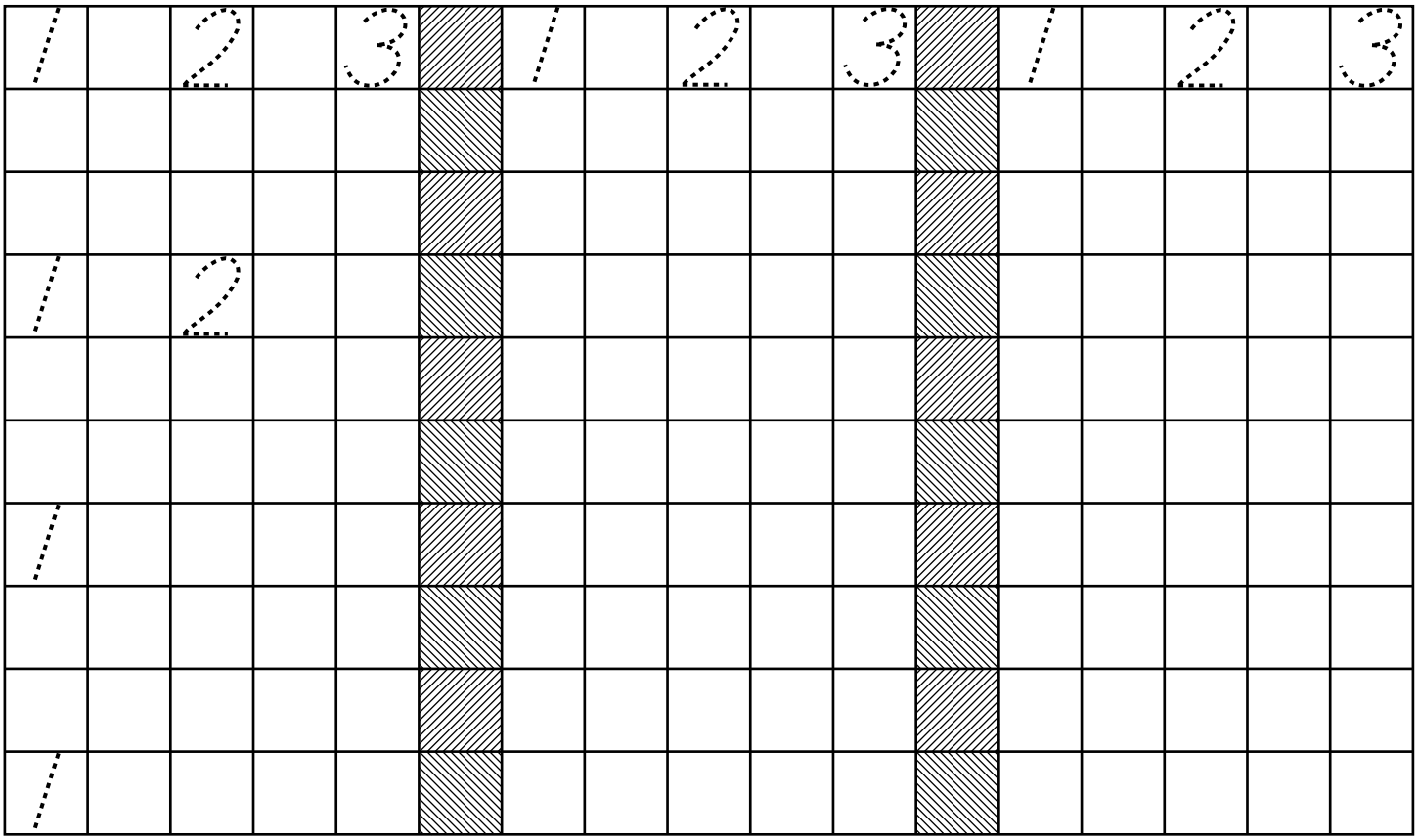


3		3		3		3		3		3		3
3		3		3		3		3		3		3
3		3		3		3		3		3		3
3		3		3		3		3		3		3
3		3		3		3		3		3		3

Los Números 1, 2 y 3

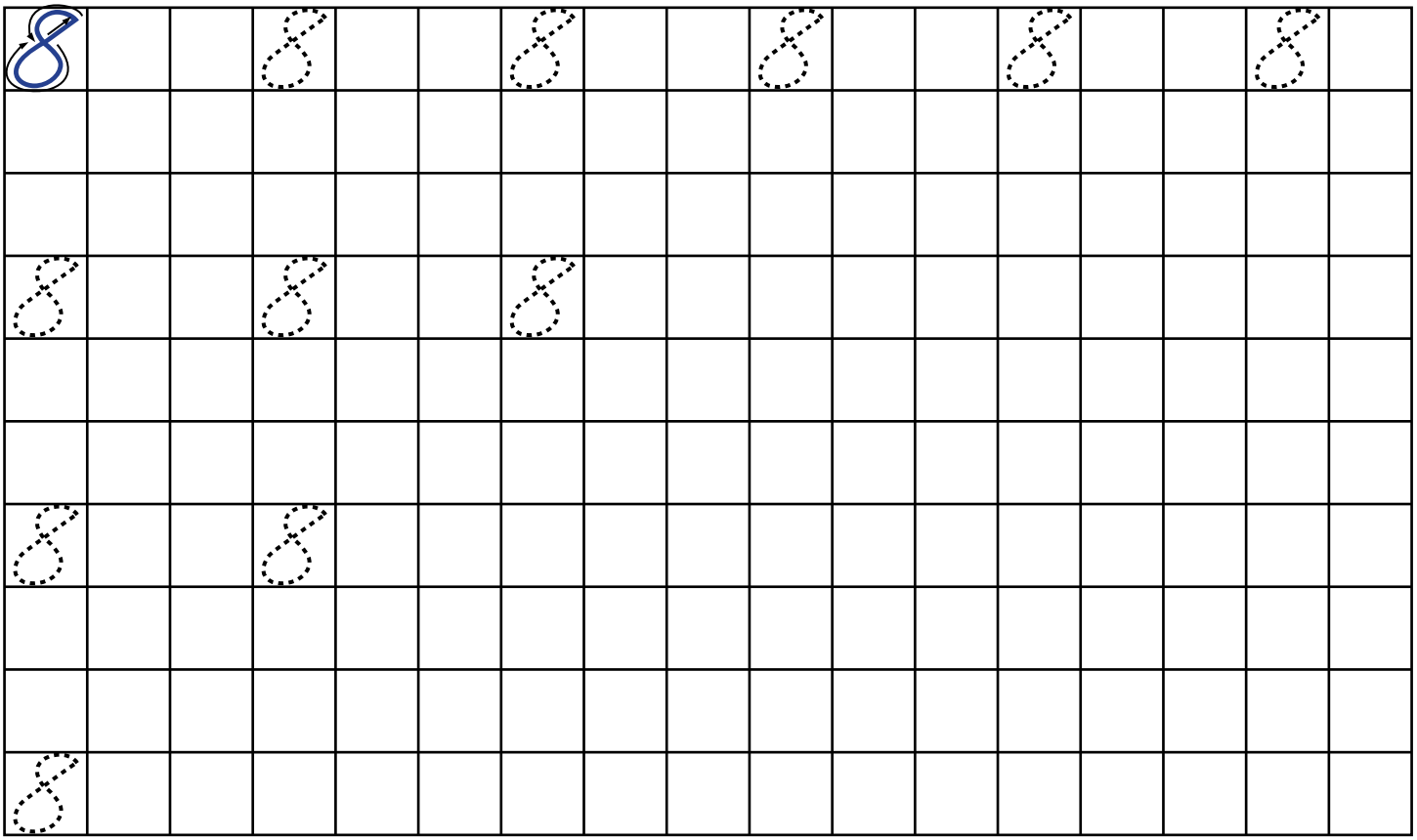
Remarca los números 1, 2 y 3, completa la plana.

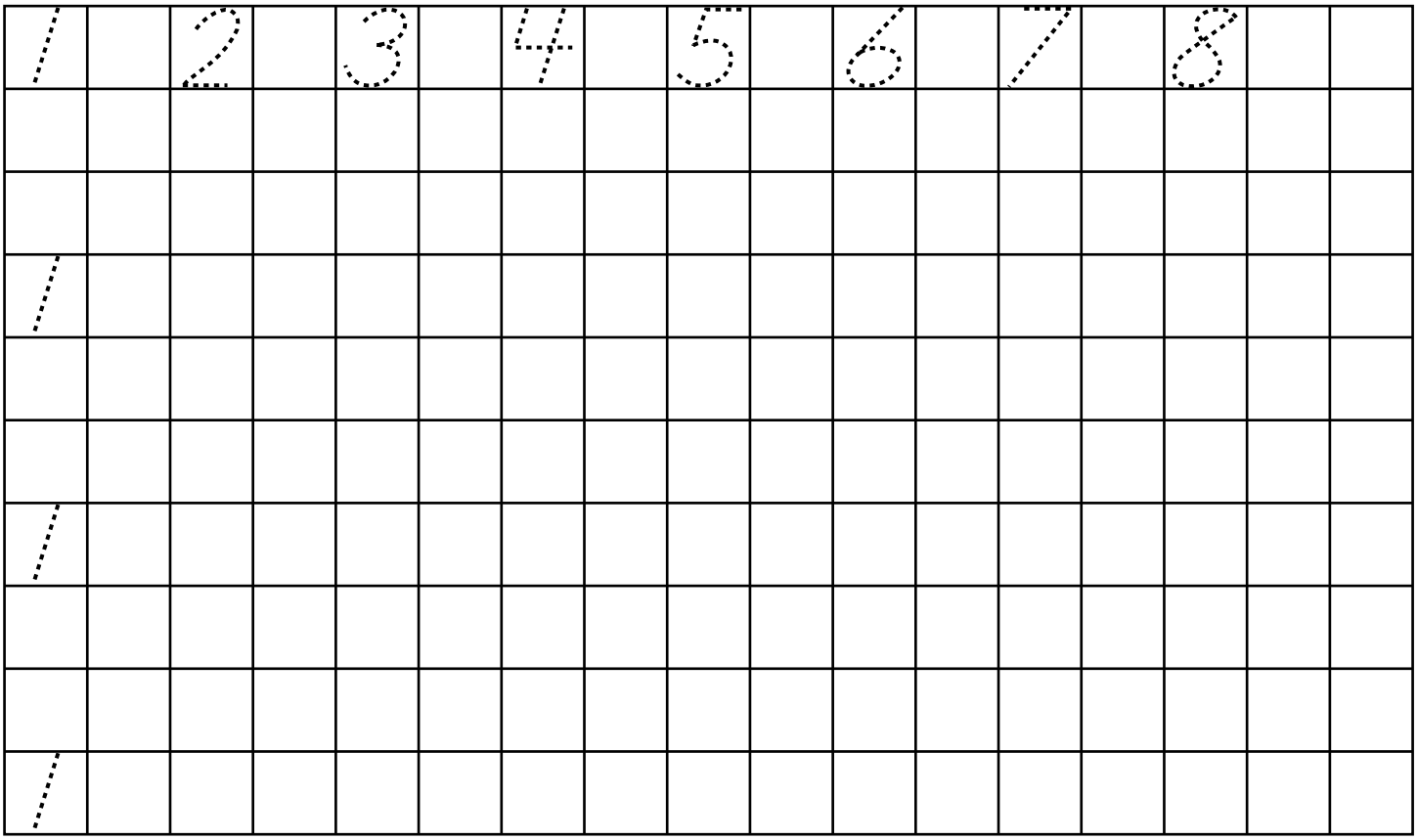




Los Números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8

Remarca los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8, completa la plana.





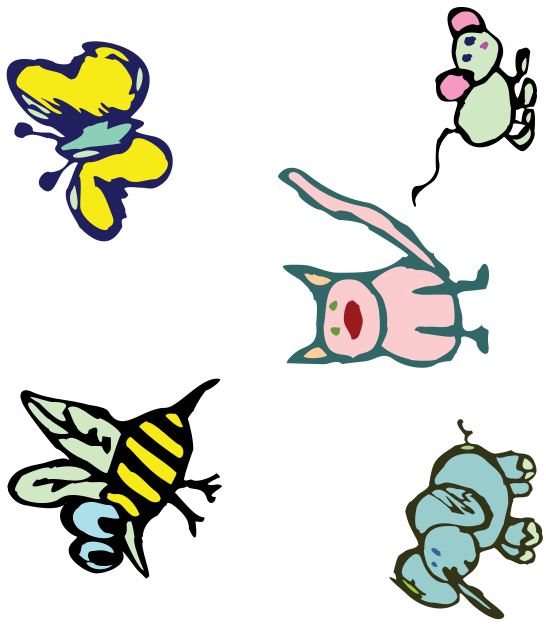
Los Números del 1 al 9

Cuenta los objetos y circula el número que corresponda.

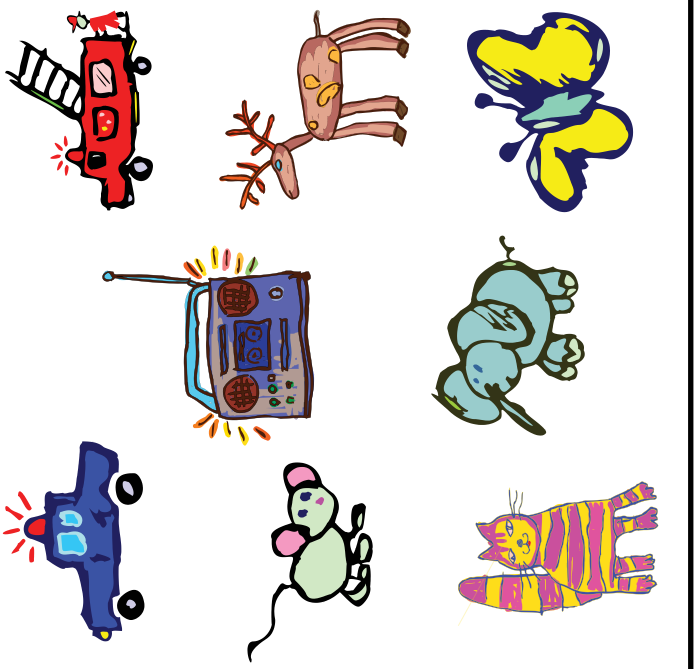
1	2	3	4	5	6	7	8	9



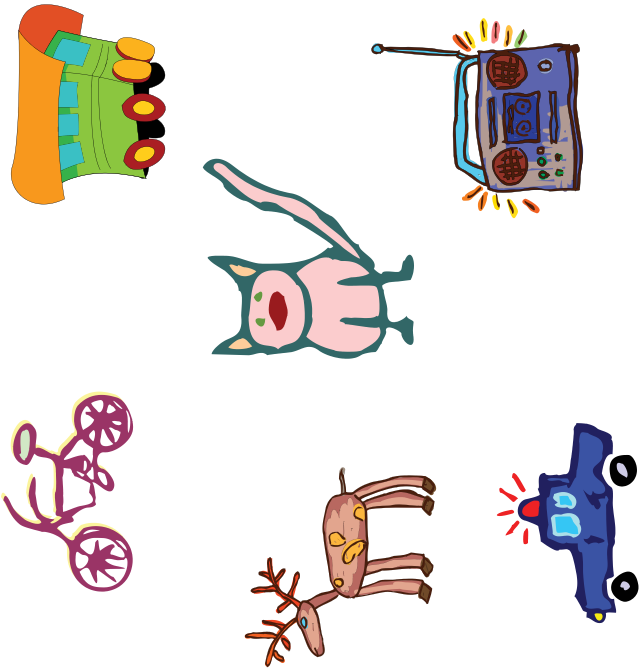
1	2	3	4	5	6	7	8	9



1	2	3	4	5	6	7	8	9

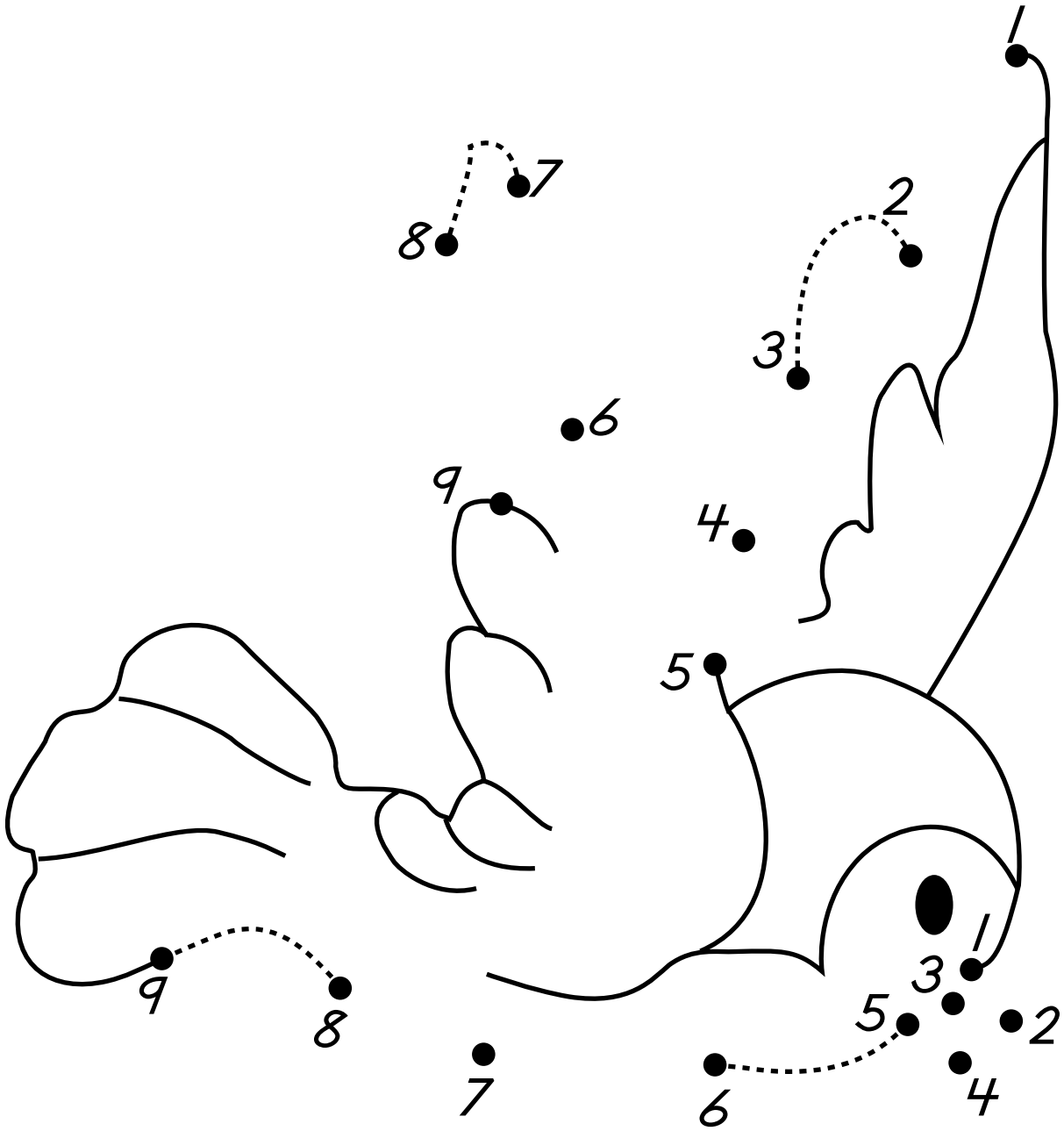


1	2	3	4	5	6	7	8	9



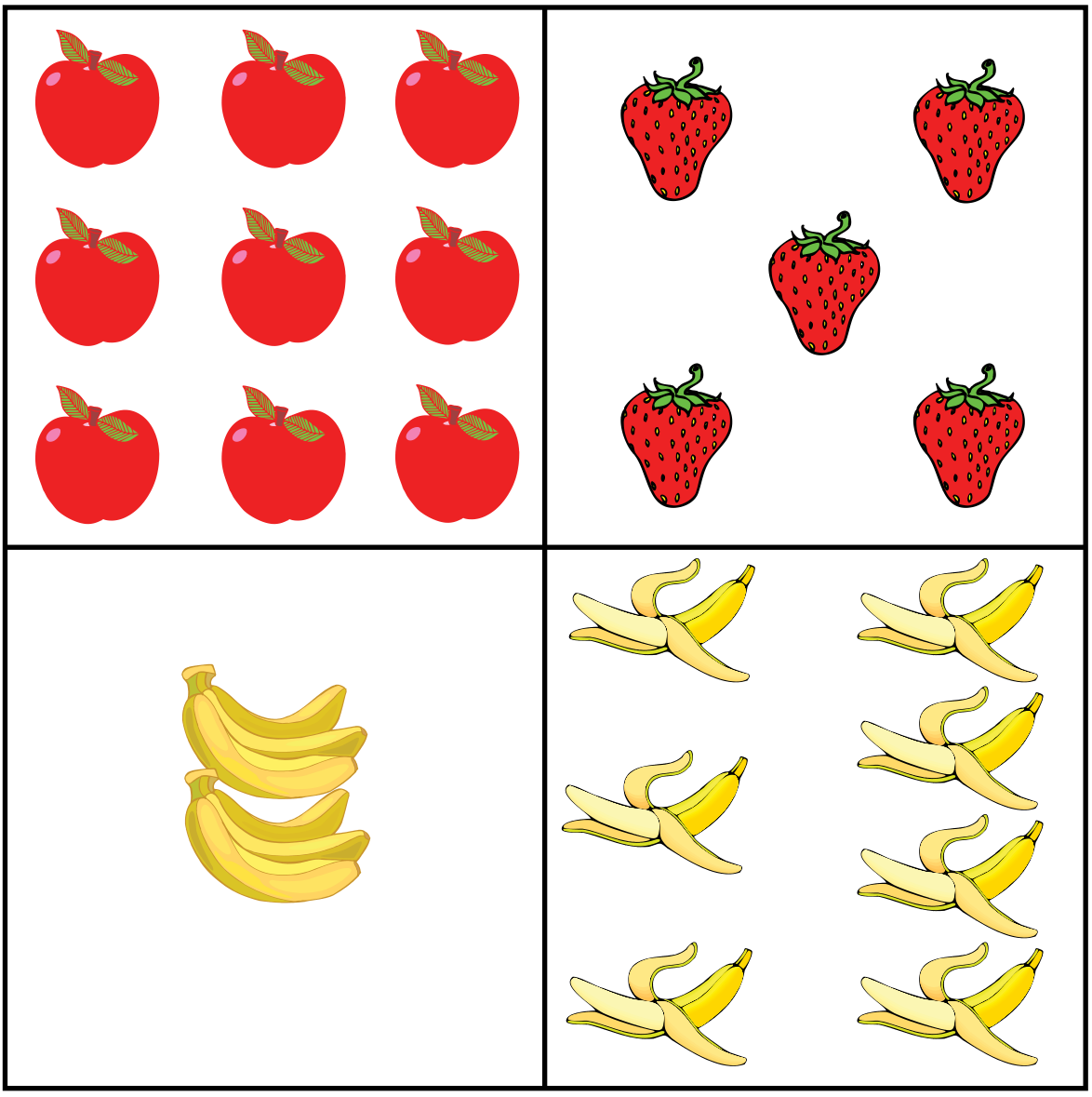
Unir los Números. Hoja 1

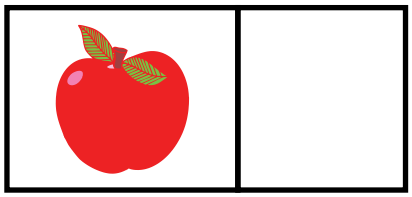
Une los puntos y descubre qué animal es. Al final coloréalo de color amarillo.

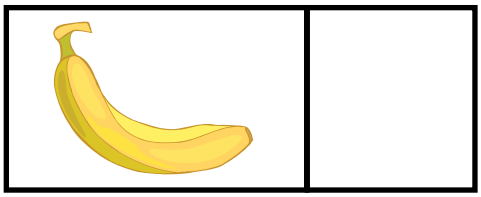


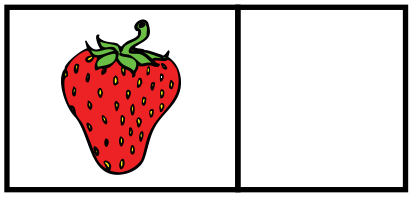
Números y Objetos

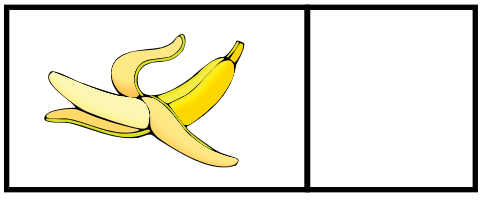
Escribe la cantidad de cada uno.











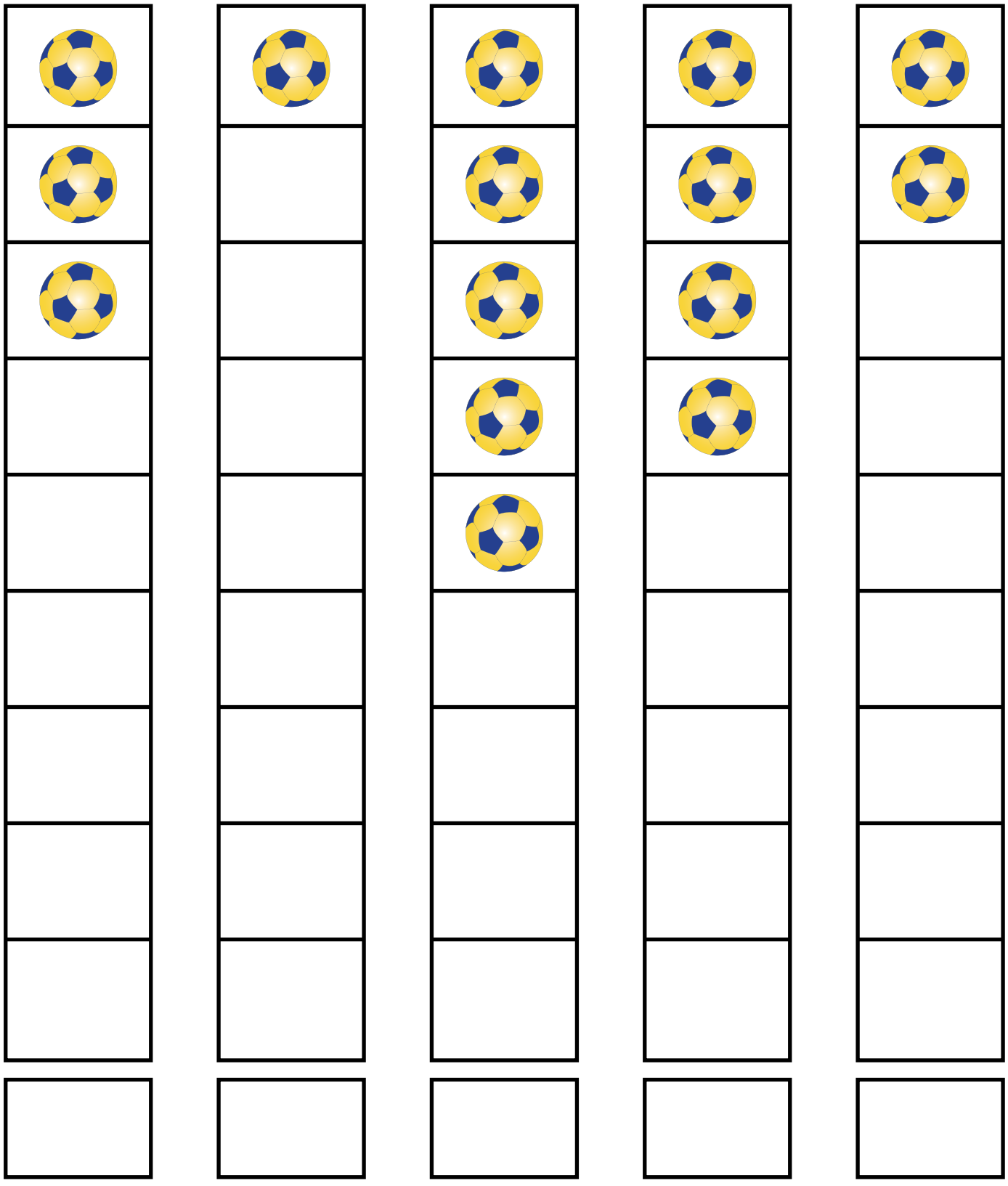
Los Números del 1 al 9 en Columnas. Hoja 1

Dibuja en cada columna el número de elementos que se indica.

				
5	7	4	8	3

Los Números del 1 al 9 en Columnas. Hoja 2

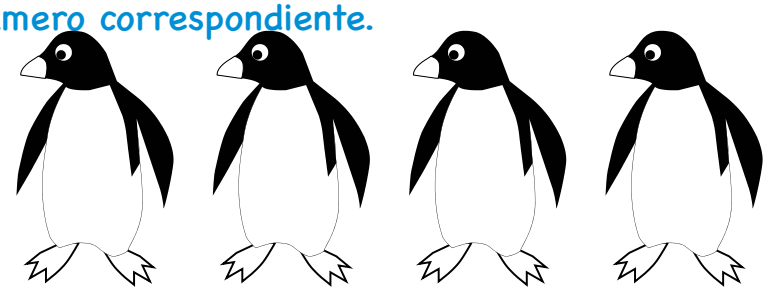
Escribe en el cuadro de abajo el número de balones que hay en cada columna.



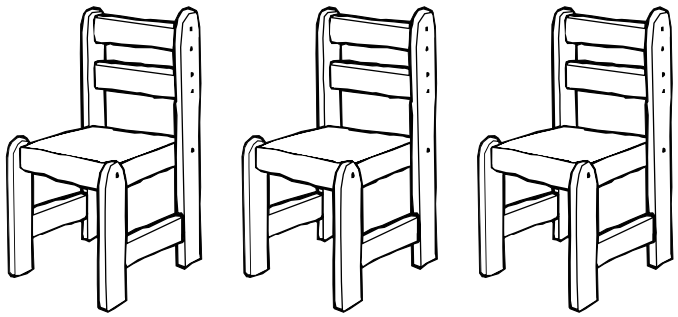
Correspondencia de Números del 1 al 5 Con Objetos

Cuenta los elementos y unélos con el número correspondiente.

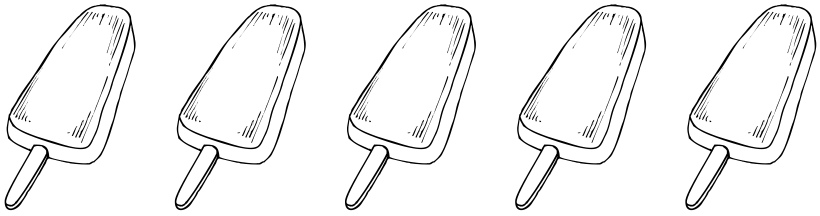
1



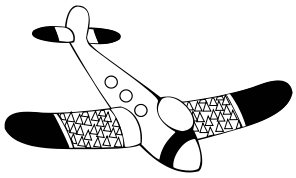
2



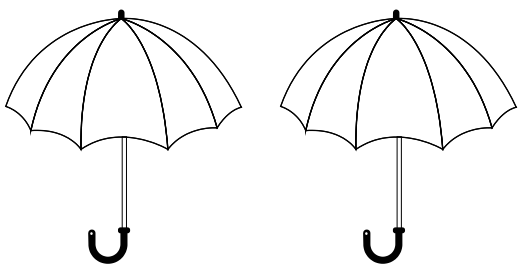
3



4



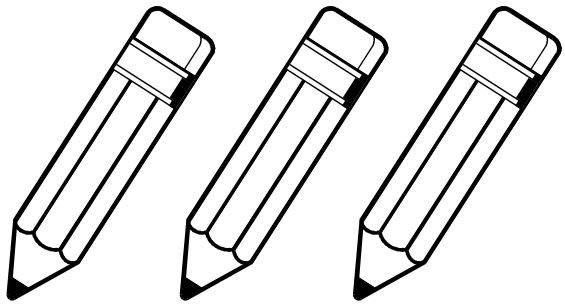
5



Números del 1 al 4 y Objetos

Cuenta los elementos y encierra en un círculo el número correspondiente.

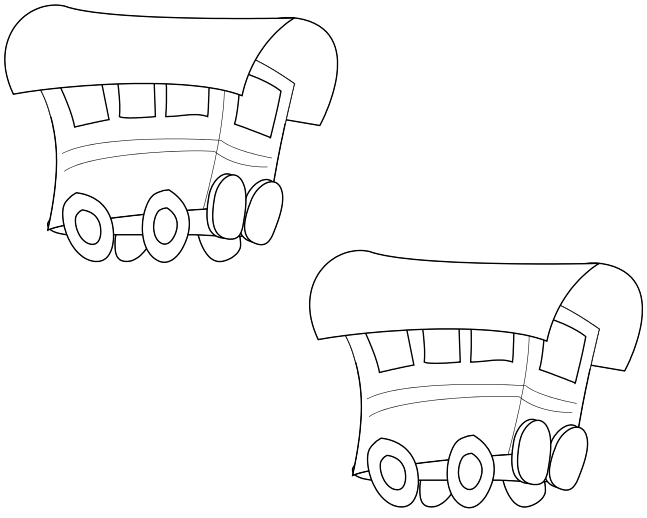
1 2 3 4



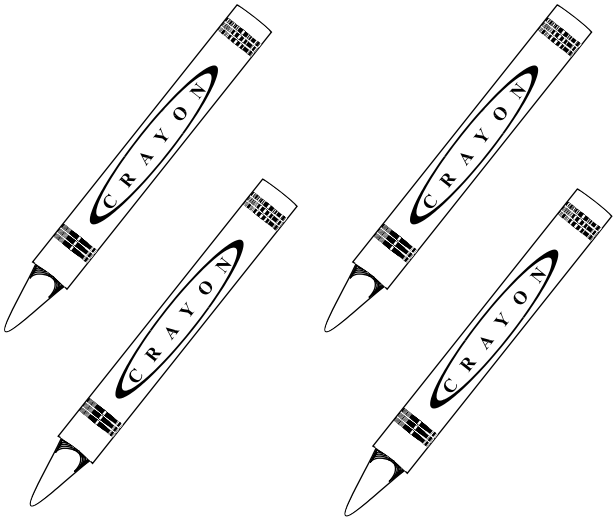
1 2 3



1 2 3



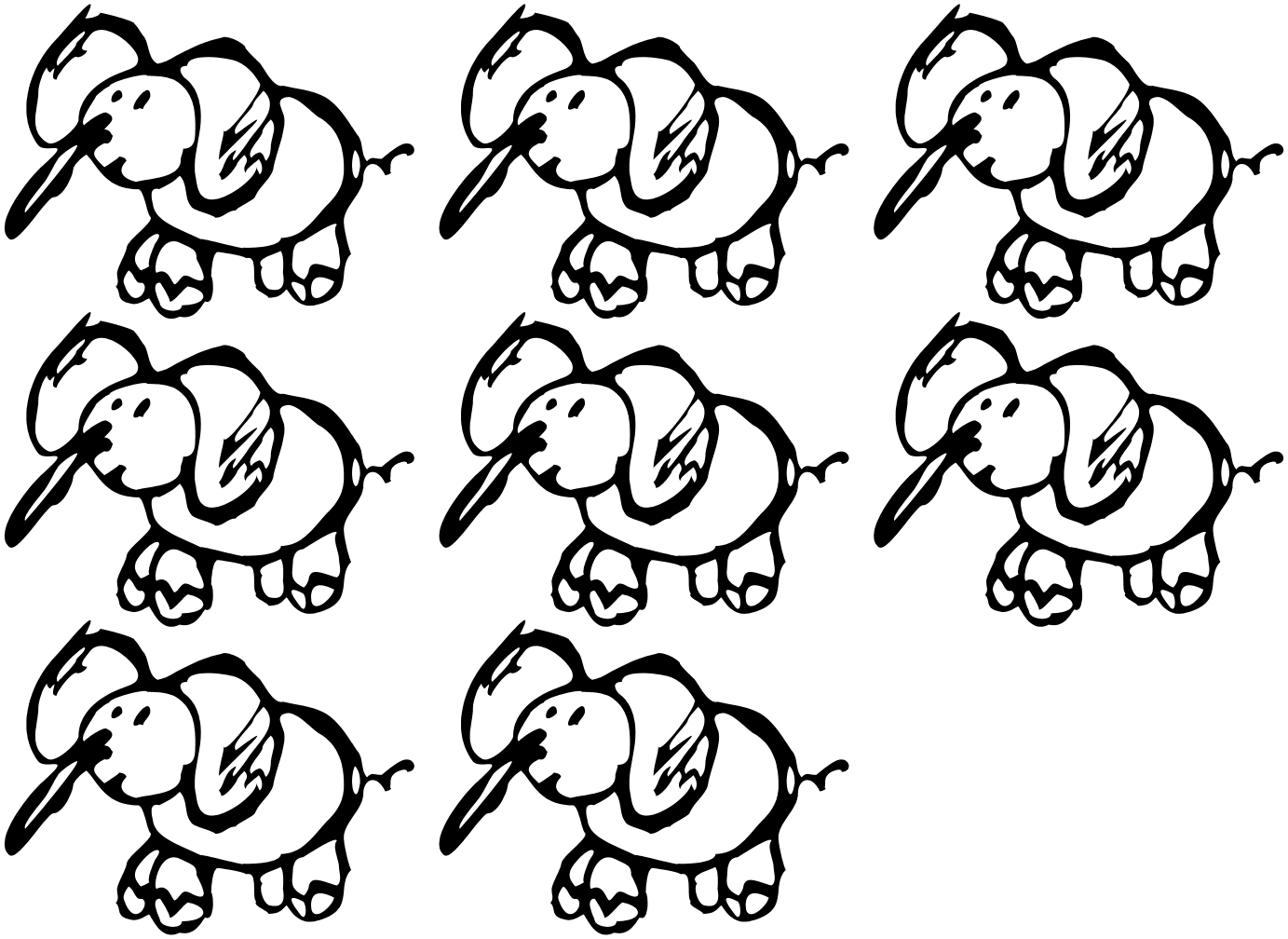
2 3 4



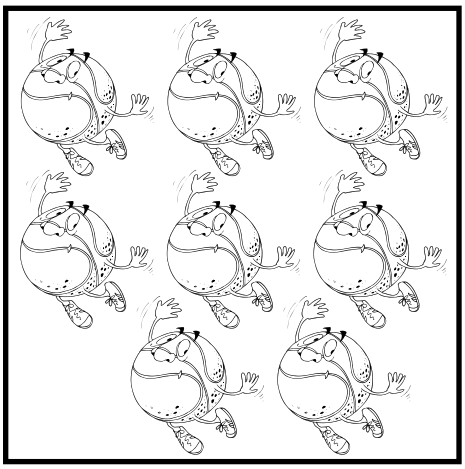
2 3 4

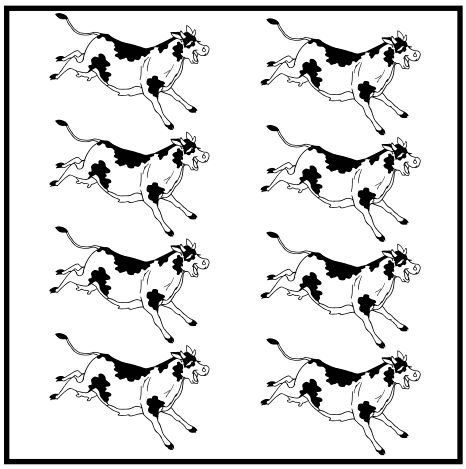
El Número 8 y 8 Objetos

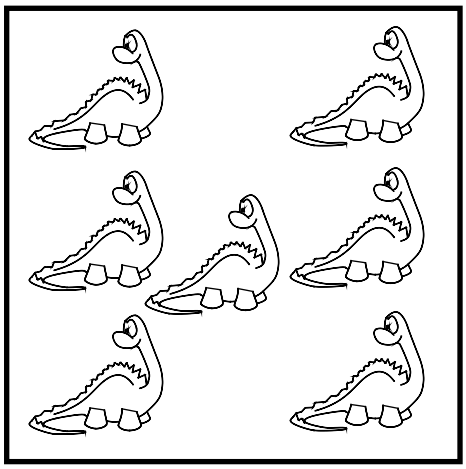
Siguiendo la línea punteada traza el número. Colorea las figuras.



Identifica los recuadros donde hay 8 figuras y coloréalas.

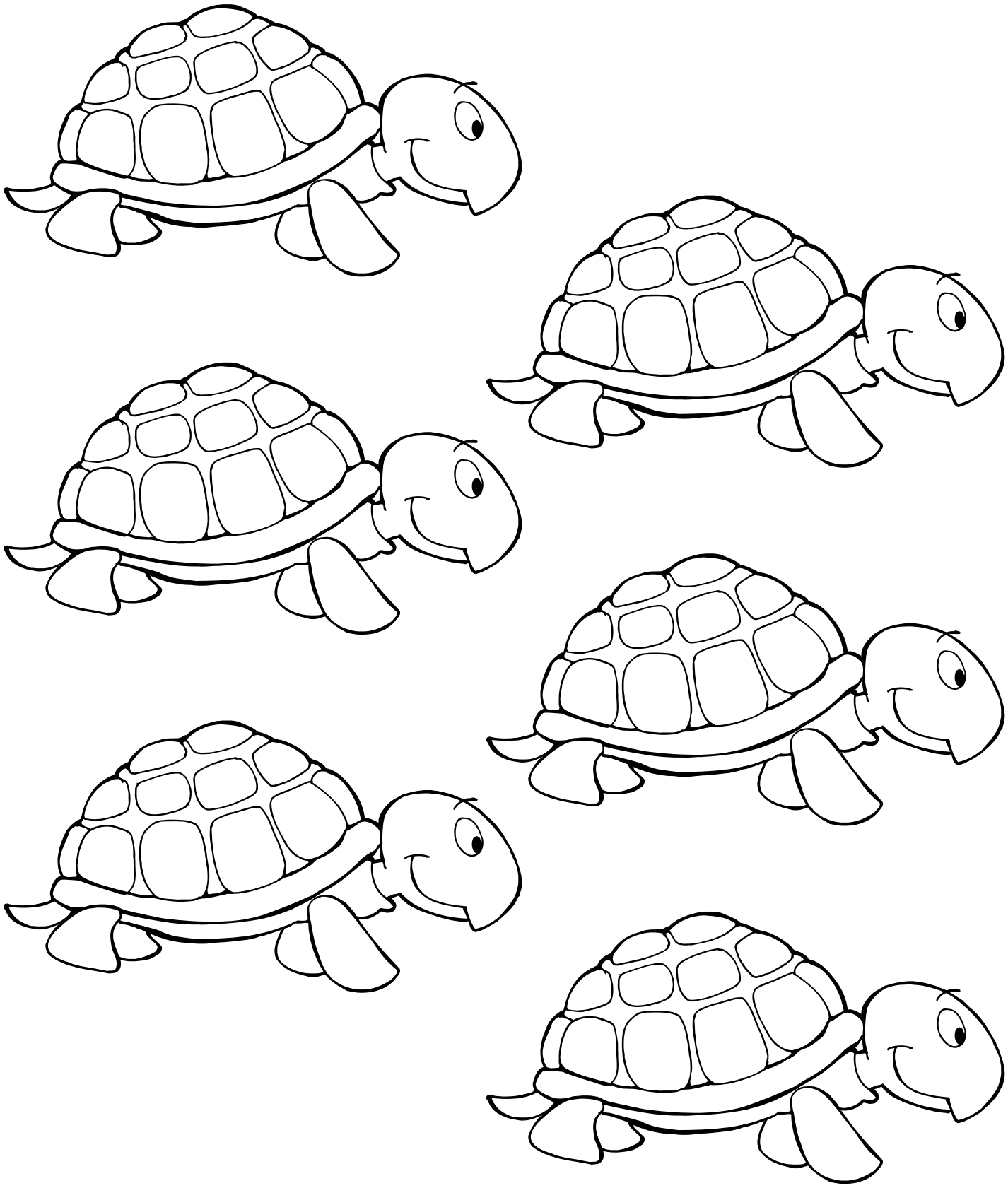






Identificar 3 Objetos

Colorea 3 tortugas de verde y 3 tortugas de rojo.



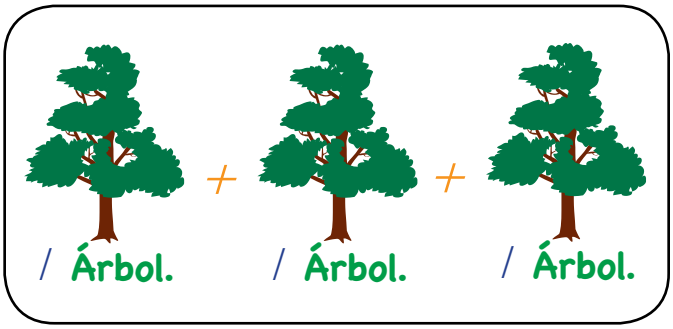
Aritmética Pre Escolar

Tercer Grado



MORENO

Ahora tenemos dos números: 1 y 2. Para crear el siguiente número, añadimos un árbol más.



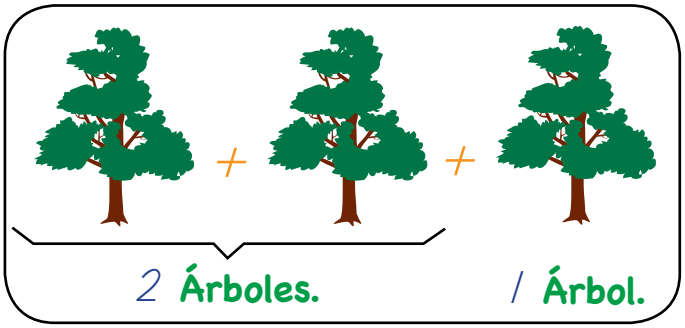
Contamos los árboles para sumarlos:

Uno más uno más uno igual tres.

El símbolo que representa tres es 3. En lenguaje aritmético la suma la expresamos como:

$1 + 1 + 1 = 3$

También podemos sumar los árboles tomando primero dos árboles y después sumar el tercero.



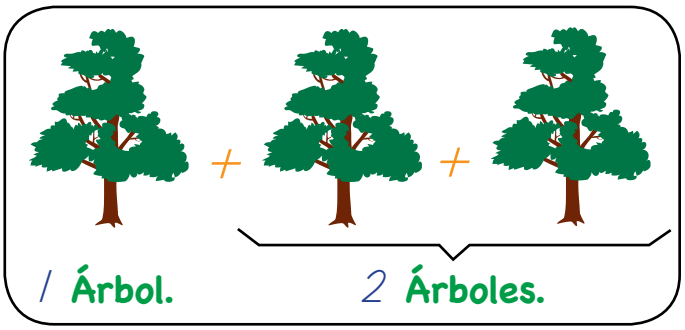
Sabemos que:

$1 + 1 = 2$

Por lo tanto:

$2 + 1 = 3$

Obtenemos el mismo resultado si primero tomamos un árbol y después los dos que sobran.



Sabemos que:

$1 + 1 = 2$

Por lo tanto:

$1 + 2 = 3$

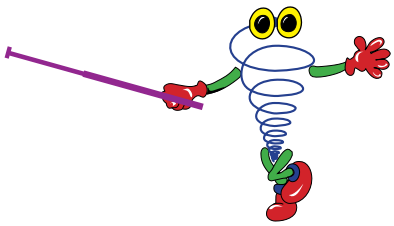
También podemos hacer las sumas utilizando una columna para escribir los símbolos de los números.

$$\begin{array}{r} 2 \\ +\ 1 \\ \hline 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{dos} \\ \text{más uno} \\ \hline \text{igual tres} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ +\ 2 \\ \hline 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{uno} \\ \text{más dos} \\ \hline \text{igual tres} \end{array}$$

Espiralito nos enseña cómo escribir el símbolo y el nombre del número 3.





Traza con color azul el símbolo del número y con color naranja el nombre del número.

3

Símbolo del Número

tres

Nombre del Número

3 tres

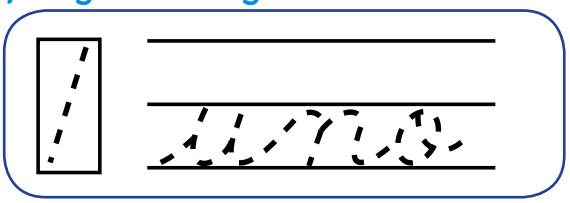
3 tres

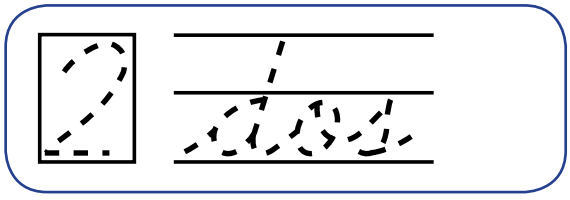
3 tres

3 tres

3 tres

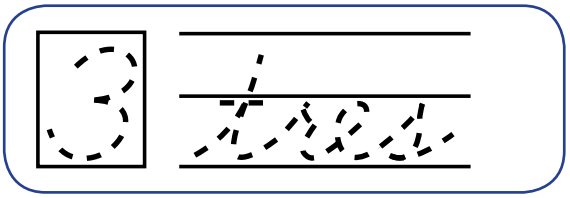
Siguiendo las líneas punteadas, traza el símbolo y el nombre de los números del uno al nueve. En la siguiente línea, repite este ejercicio como se muestra en el primero y segundo renglones.

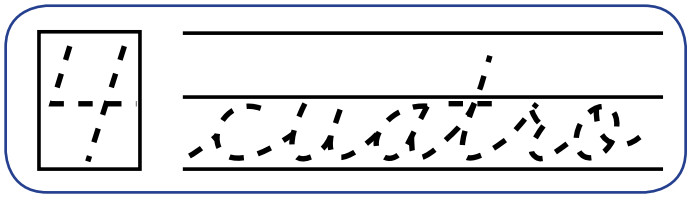


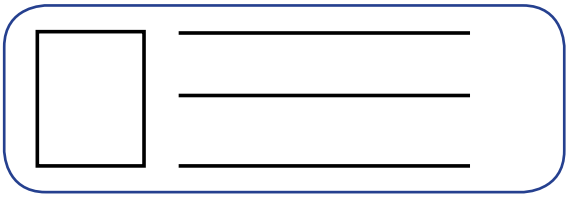


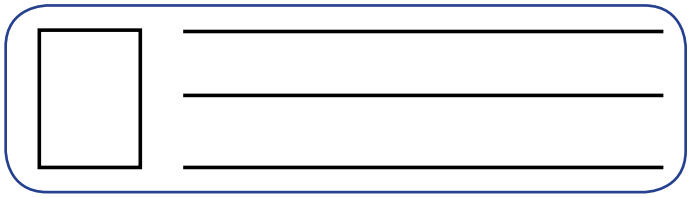
1 uno

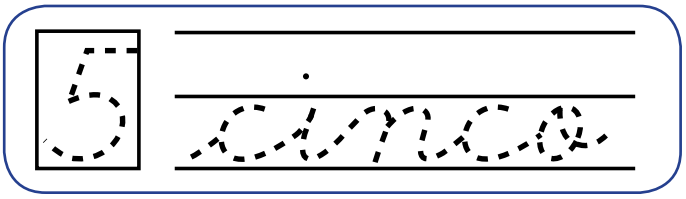
2 dos

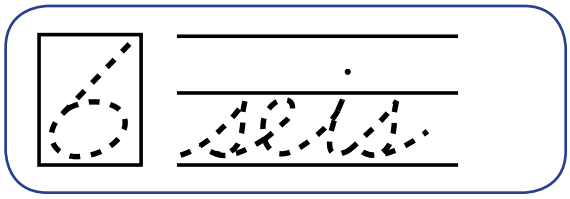


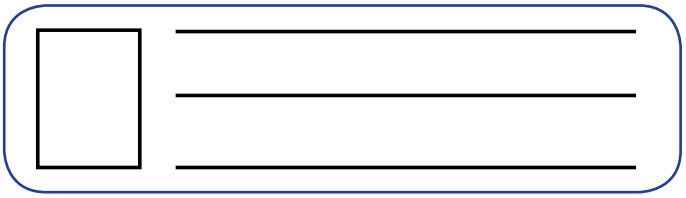


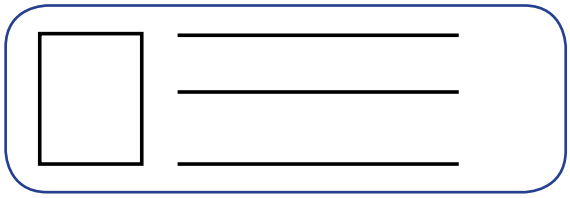


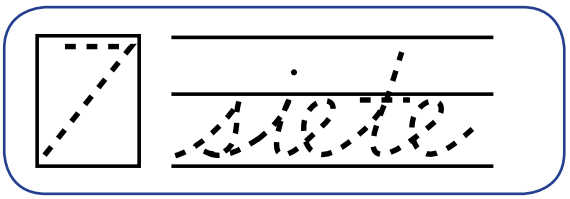


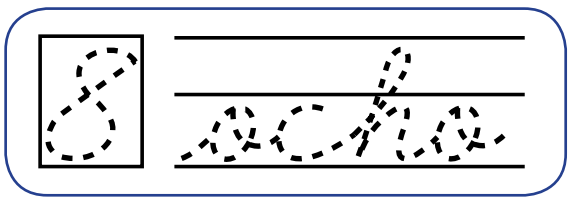


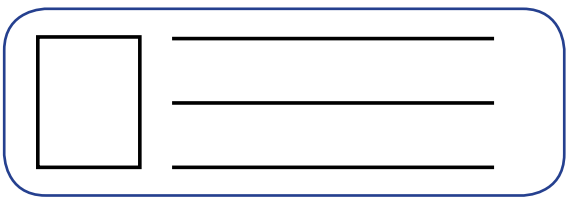


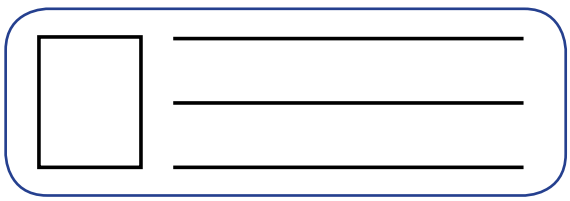


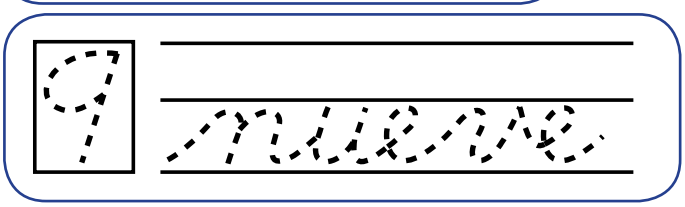


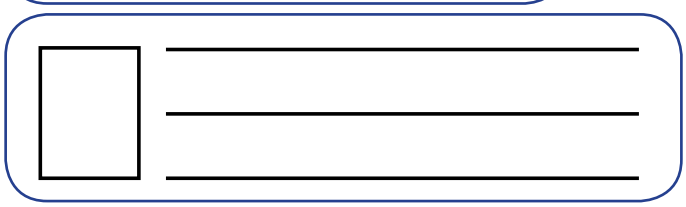






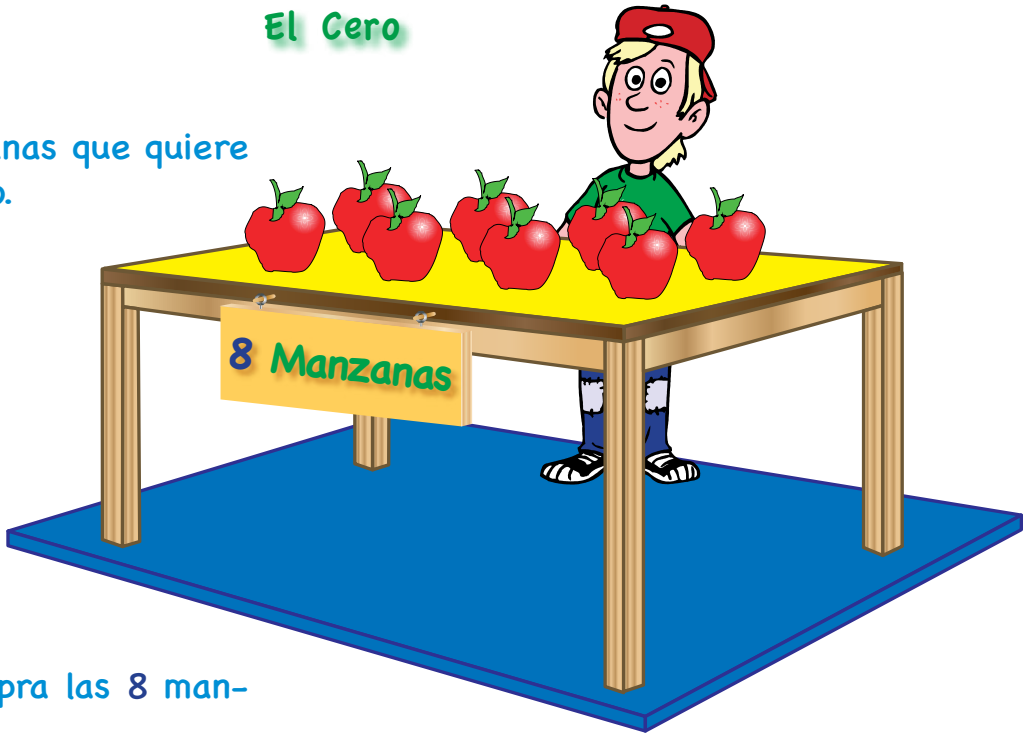






El Cero

Cletito tiene 8 manzanas que quiere vender en el mercado.



Doña Teodosia le compra las 8 manzana.

Cletito para indicar a sus clientes que ya no tiene manzanas, inventa un símbolo y lo coloca sobre la mesa.

Al símbolo le pone el nombre de cero.

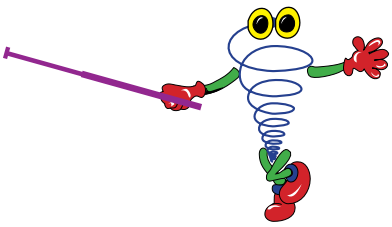


Cuando los clientes ven el símbolo 0 sobre la mesa, ya saben que no hay manzanas.

No hay manzanas es lo mismo que 0 manzanas.

Escribir el nombre del número cero y el símbolo es muy sencillo. Espiralito nos enseña cómo hacerlo.





Traza con color negro el símbolo del número y con color naranja el nombre del número.

O

Símbolo del Número

cero

Nombre del Número

Sigue la dirección de las flechas para escribir el símbolo y el nombre del número 0.

O cero

O cero

O cero

O cero

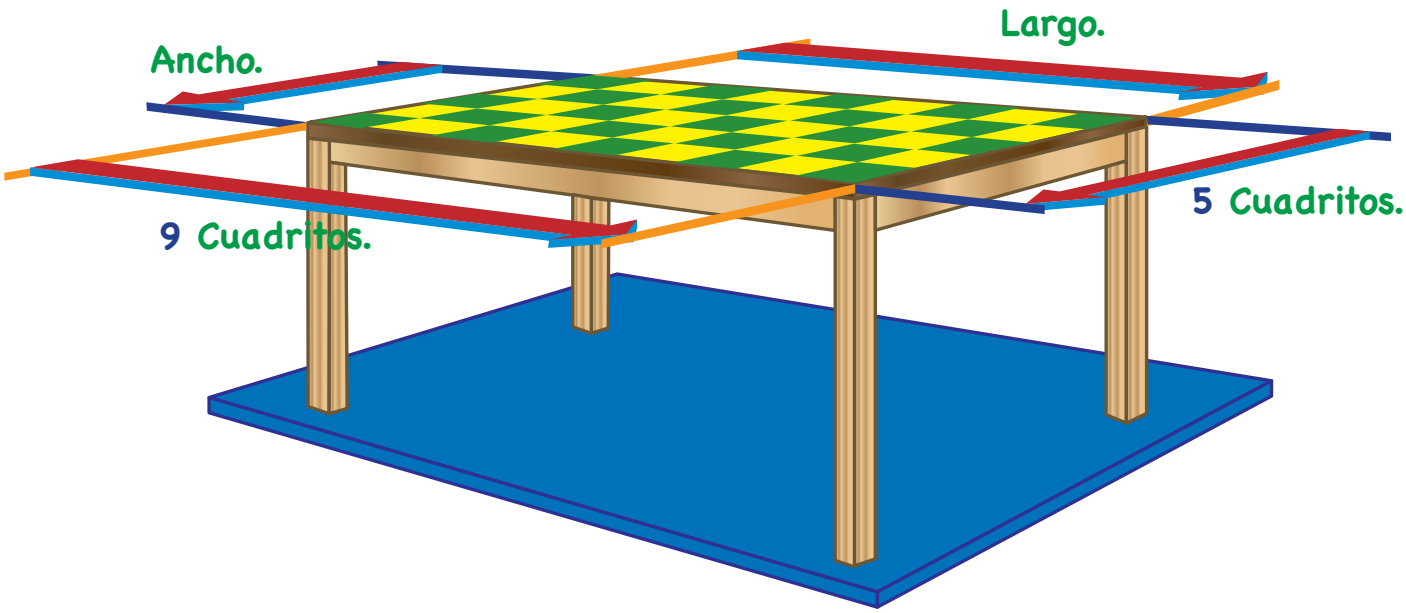
O cero

Los Números Representan Dimensiones

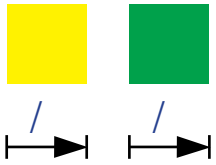
Cómo Medir Dimensiones

La dimensión, distancia o tamaño es lo mismo.

Por ejemplo, las dimensiones o tamaño de una mesa, o el largo y ancho de la mesa.



Cada cuadrito mide 1 de largo, es decir, tiene una dimensión de 1 o su tamaño es 1.



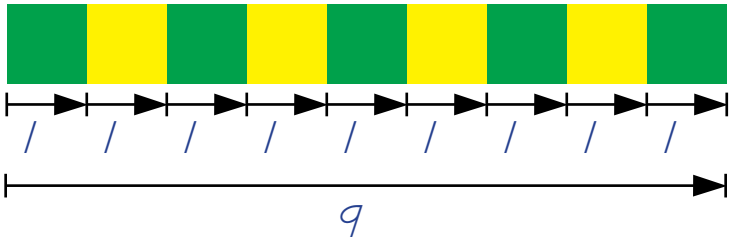
Para medir la dimensión de cualquier objeto utilizando los cuadritos, los acomodamos formando una línea.

Contamos el número de cuadritos que forman el objeto y conocemos su dimensión.

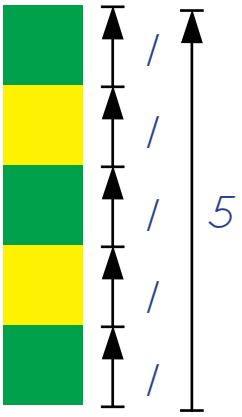
Para medir el largo y el ancho de la mesa, utilizamos los cuadritos que la forman. Contando los cuadritos, sabemos cuánto mide de largo y cuánto de ancho.

La mesa mide:

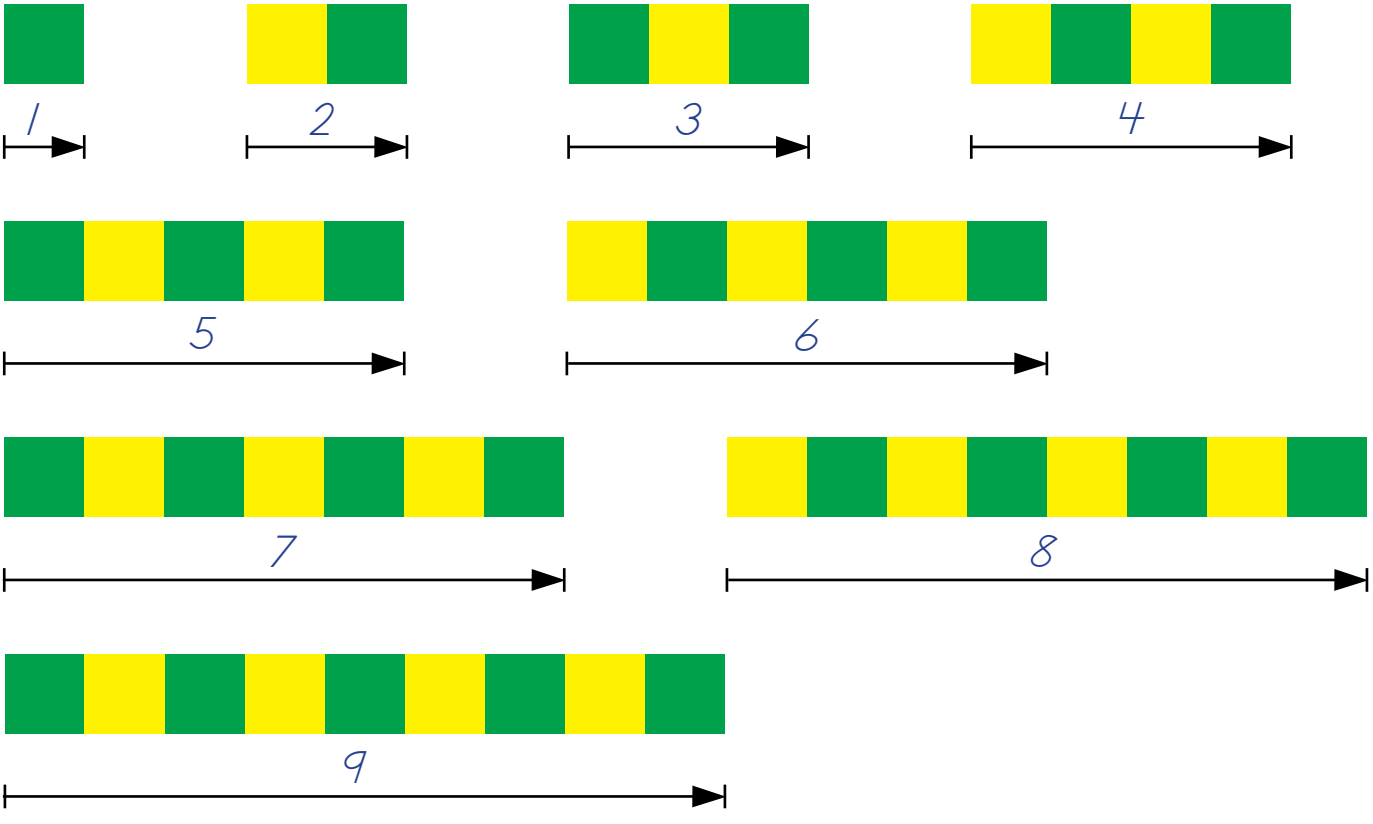
9 cuadritos de largo.



5 cuadritos de ancho.



Utilizando cuadritos y flechas -vectores- podemos medir cualquier dimensión o distancia.



Podemos utilizar otros objetos para medir dimensiones, por ejemplo pies.

Calculamos cuántos pies mide de largo y ancho la casa de Espiralito.

La casa de Espiralito mide 8 pies de largo y 8 pies de ancho (Ver siguiente página).

Para hacer más fácil el calcular las dimensiones de la casa de Espiralito, representamos cada uno de los pies con una flecha. Contamos las flechas y representamos el largo y el ancho con una flecha que mide 8.

La Recta de los Números

Cómo Representar Dimensiones

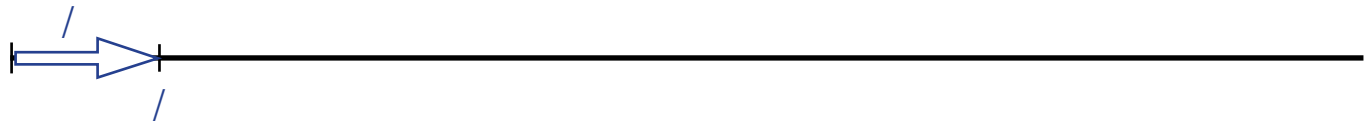
La recta de los números es una línea en donde escribimos los números. Cada número representa una dimensión o distancia.

Utilizando flechas, que en matemáticas se llaman vectores, podemos construir la recta de los números.

Primero trazamos una recta.

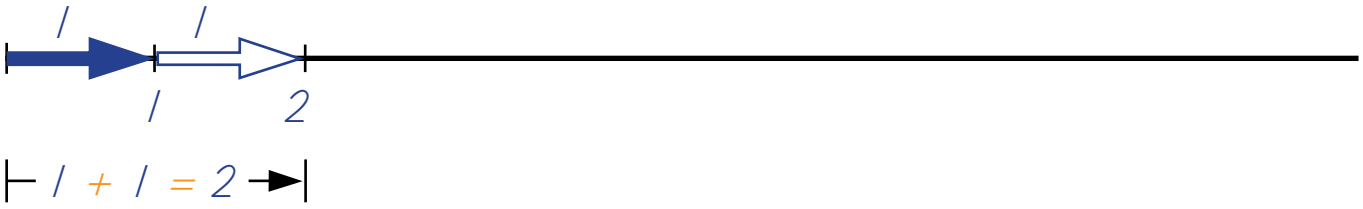
Colocamos una flecha -vector- sobre la recta y escribimos su dimensión.

Ilumina de color azul el vector que hemos colocado.



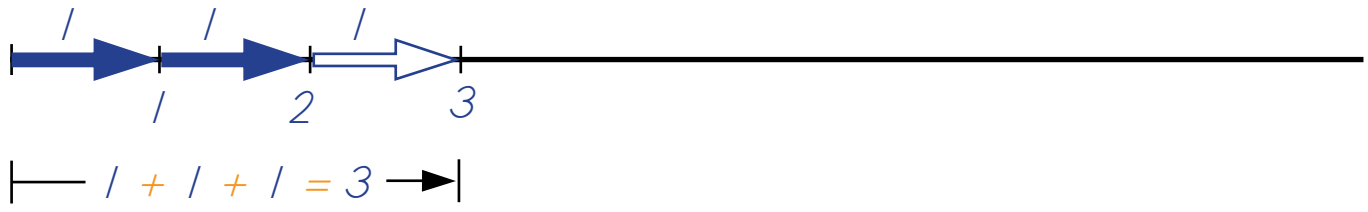
Colocamos una flecha más sobre la recta, la sumamos a la primera y escribimos su dimensión.

Ilumina de color azul el segundo vector.

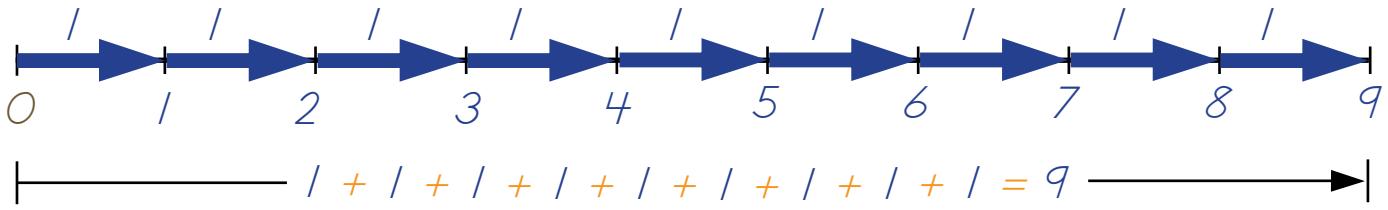


Colocamos una flecha más sobre la recta, la sumamos a las dos que tenemos y escribimos su dimensión.

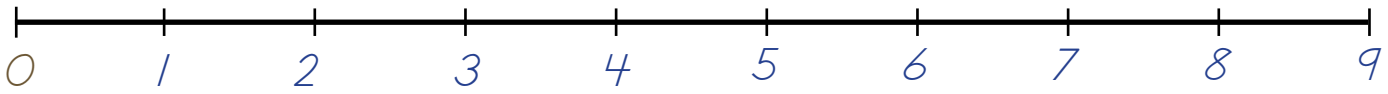
Ilumina de color azul el tercer vector.



Debido a que el cero es el número que representa que no hay ningún objeto, también representa que no hay ninguna dimensión. Entonces lo colocamos al inicio de la recta.



Quitamos los vectores y tenemos la recta de los números que hemos construido.



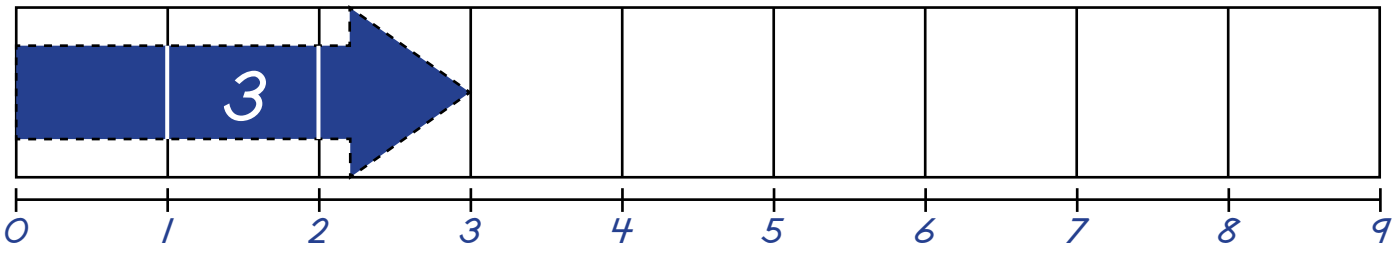
Ejercicios Con el Material Didáctico

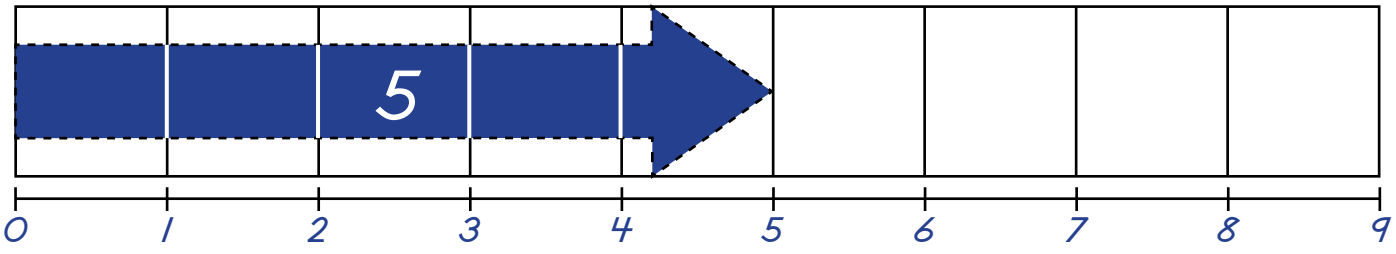
La recta de los números es muy útil para representar dimensiones o tamaño de los números utilizando flechas o vectores.

Recorta la recta de los números del material didáctico.

Recorta los vectores del material didáctico para representar la dimensión de los números.

Utilizando la recta y los vectores del material didáctico, representa el número 3 y después el número 5, como se muestra.





Mayor Que

Cuando en una familia el papá tiene más años que la mamá, decimos que el papá es mayor que la mamá.

Cuando tienen un hijo, decimos que el papá y la mamá son mayores que el hijo.

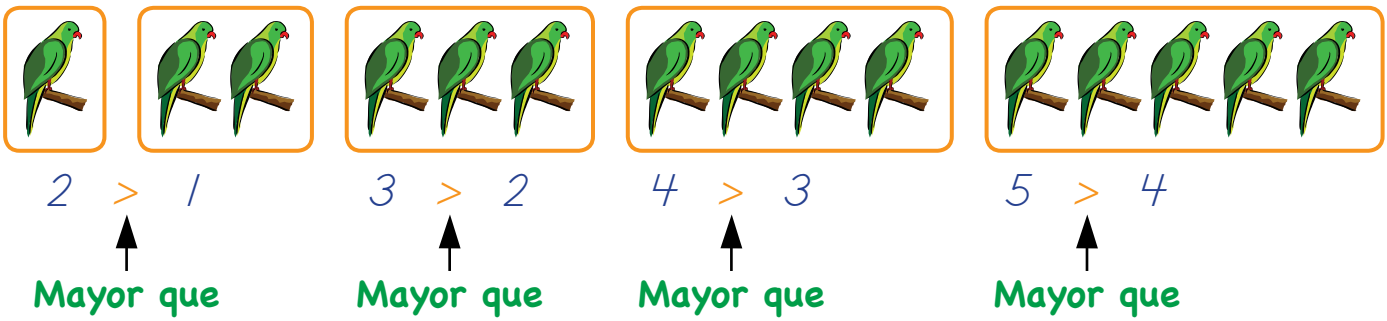
Igualmente lo hacemos en matemáticas, cuando decimos que un número es mayor que otro.



Para crear los números seguimos un orden determinado: empezamos con el número que representa menos objetos, animales o personas y seguimos aumentado objetos uno a uno.

El número **2** es mayor al número **1** ya que representa más objetos. Lo mismo, el **3** es mayor que **2** ya que representa más objetos.

En matemáticas para indicar que un número representa más objetos que otro, es decir es mayor que otro, usamos el símbolo >.



2 > 1 — Mayor que

3 > 2 — Mayor que

4 > 3 — Mayor que

5 > 4 — Mayor que



6 > 5 — Mayor que

7 > 6 — Mayor que

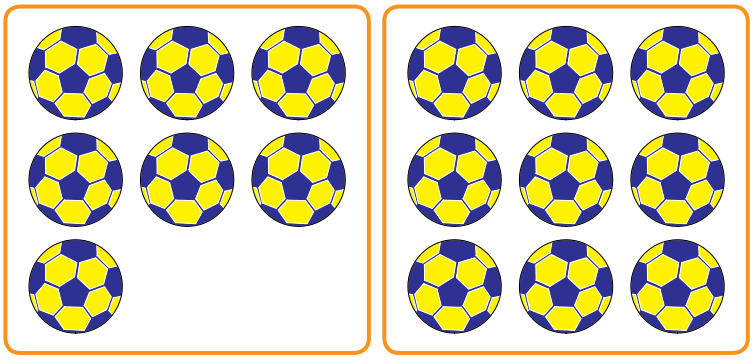


8 > 7 — Mayor que

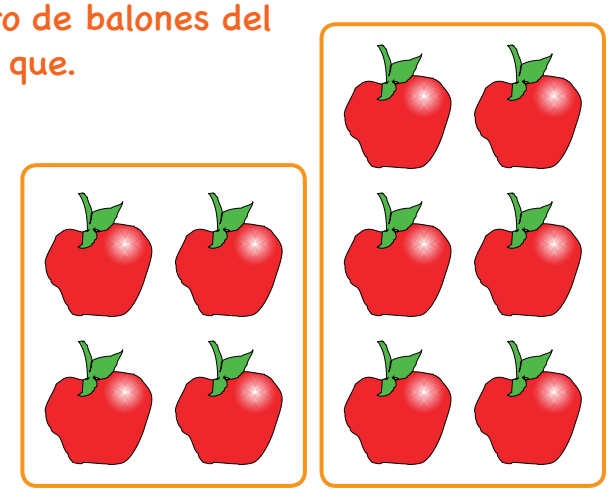
9 > 8 — Mayor que

Cuando comparamos dos conjuntos de objetos o dos dimensiones –vectores–, podemos decir cuál tiene más objetos o cuál de los vectores es más grande y así establecer cuál número es el mayor de los dos.

Escribe del lado izquierdo el número de balones del conjunto mayor y del lado derecho el número de balones del menor y entre ellos el símbolo de mayor que.



7 9

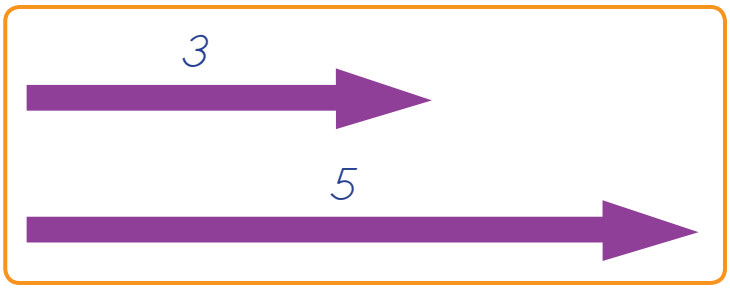


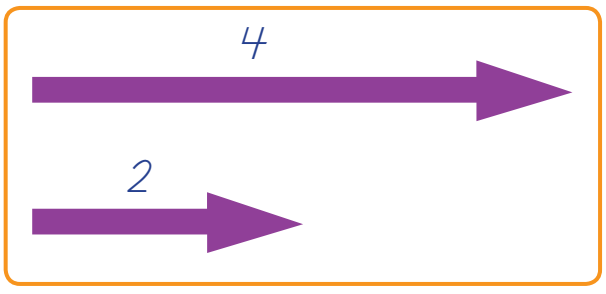
4 6

Mayor que

Mayor que

Escribe del lado izquierdo la dimensión más grande de las flechas o vectores, del lado derecho la menor y entre ellas el símbolo de mayor que.



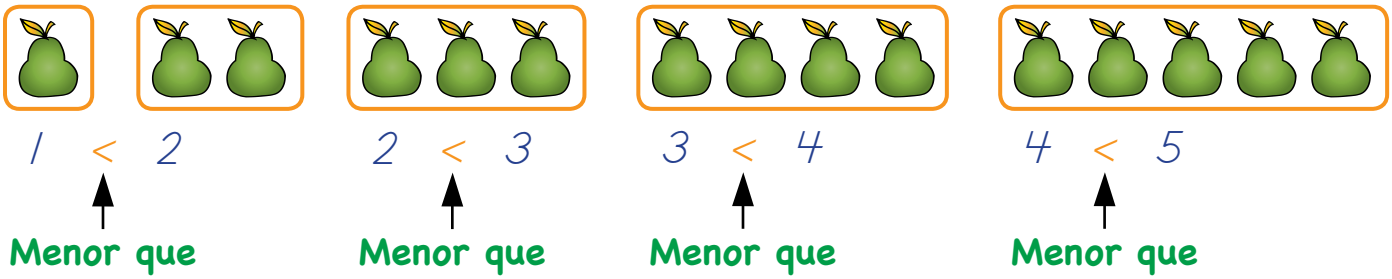


Mayor que

Mayor que

Menor Que

También podemos indicar cuando un número es menor que otro, es decir cuando el número de objetos, animales o personas que representa es menor. El símbolo que utilizamos para indicar que un número es menor que otro es <.



1 < 2 — Menor que

2 < 3 — Menor que

3 < 4 — Menor que

4 < 5 — Menor que



5 < 6 — Menor que

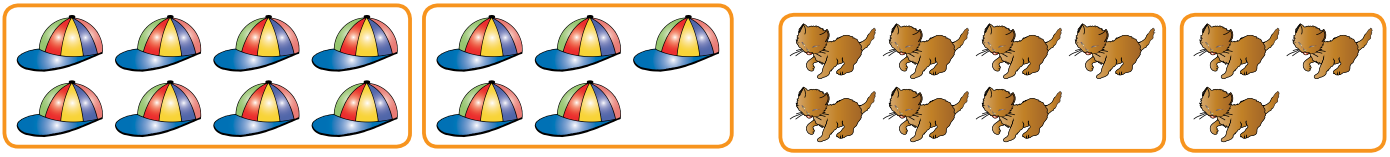
6 < 7 — Menor que



7 < 8 — Menor que

8 < 9 — Menor que

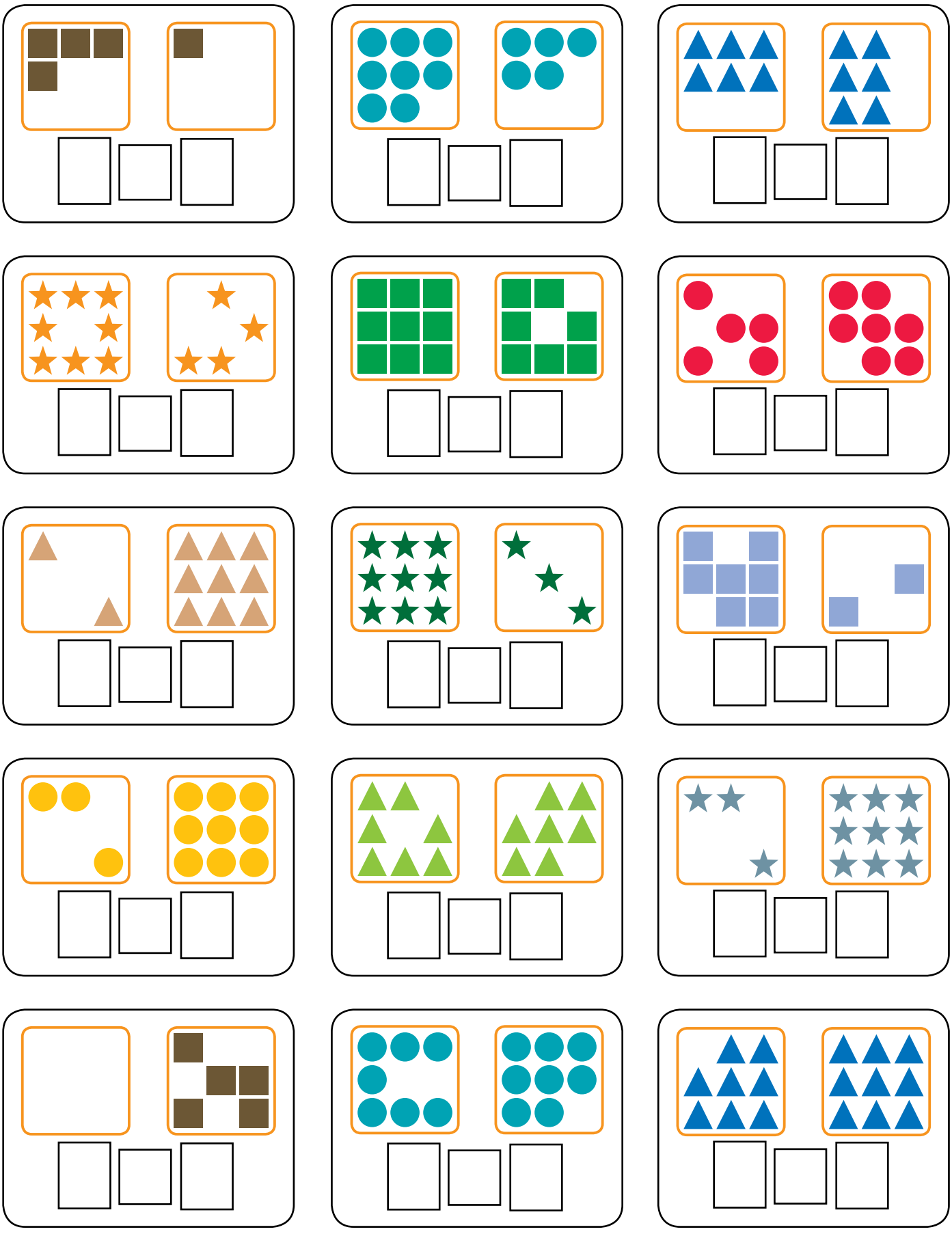
Escribe del lado izquierdo el número de gorras y gatos del conjunto menor y del lado derecho el número de gorras y gatos del mayor y entre ellos el símbolo de menor que.



8 5 — Menor que

7 3 — Menor que

Escribe el número de figuras geométricas que cada conjunto tiene. Determina si el conjunto de la izquierda es mayor, menor o igual que el de la derecha.



Series de Números

Cuando escribimos los números en orden, bien sea del menor al mayor o del mayor al menor, decimos que hemos formado una serie de números.

Por ejemplo, la serie del 0 al 5 es:

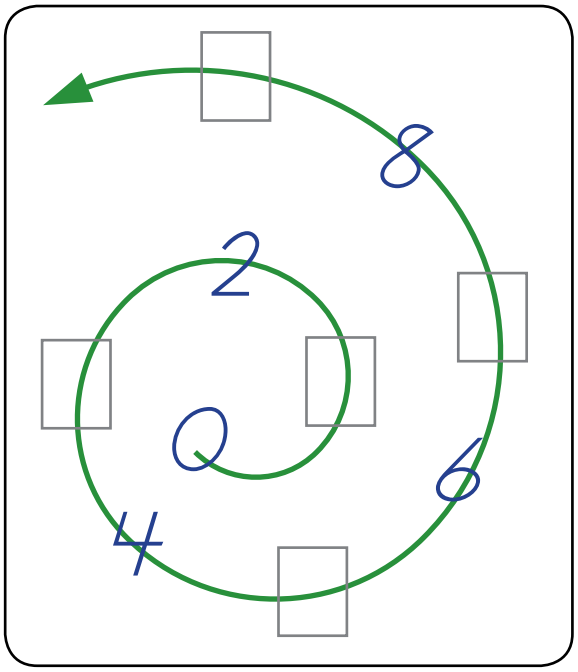
0, 1, 2, 3, 4, 5.

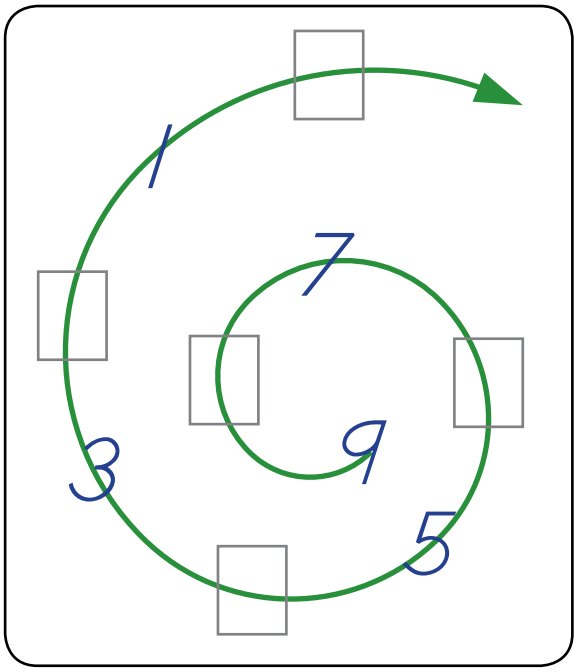
También podemos hacer la serie del 5 al 0:

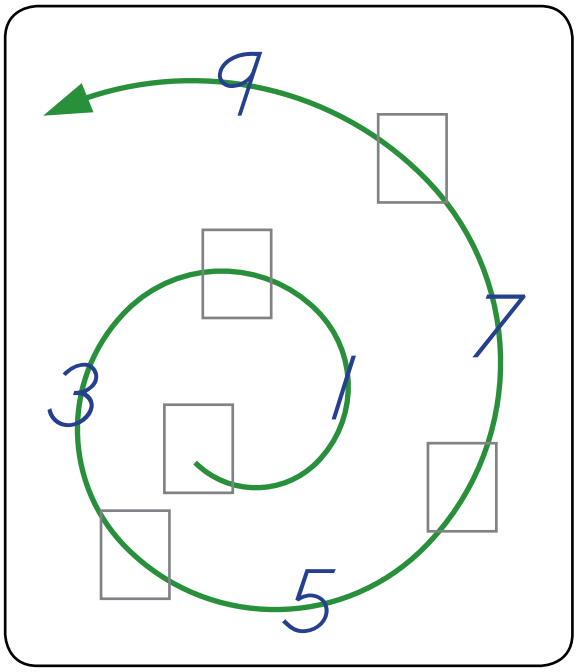
5, 4, 3, 2, 1, 0.

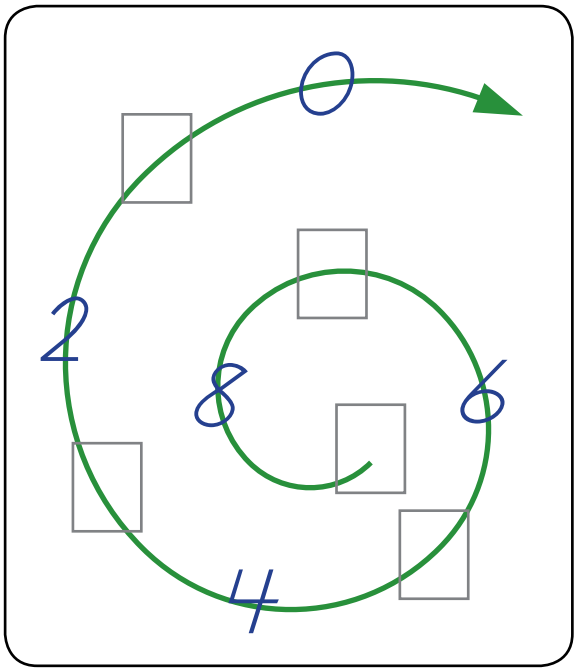
Realiza el siguiente ejercicio.

Estudia con detenimiento las series del 0 al 9 y del 9 al 0 en las espirales. En el lugar correspondiente escribe los números que hacen falta.









Antecesor y Sucesor

Cuando construimos la recta de los números primero colocamos el 0 y caminando hacia la derecha escribimos los demás números. Es decir, la recta de los números crece de izquierda a derecha.

El 0 viene antes del 1; el 1 antes del 2; el 2 antes del 3 y así sucesivamente.

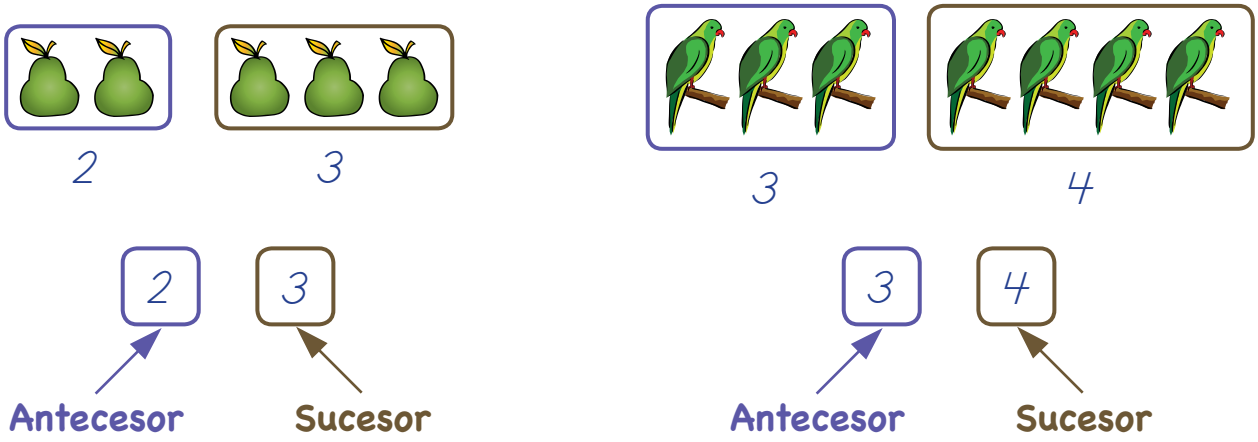
Construimos la recta de los números de izquierda a derecha. Primero colocamos el 0, caminamos una unidad y colocamos el 1, caminamos otra unidad y colocamos el 2 y así sucesivamente.

Recorremos la recta de los números de izquierda a derecha.



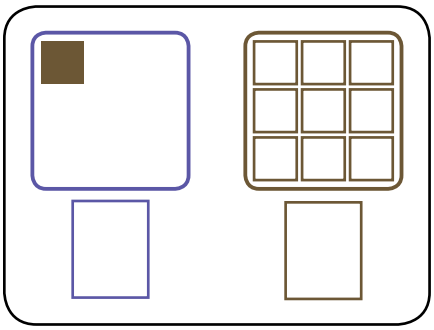
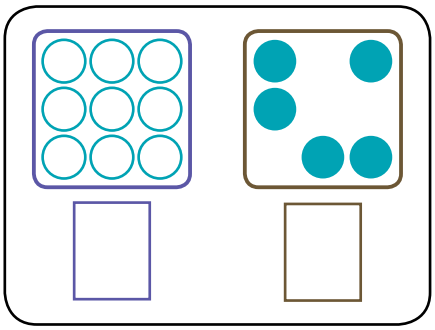
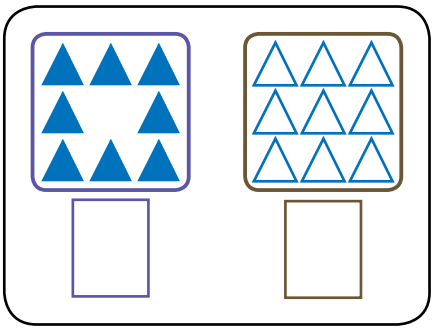
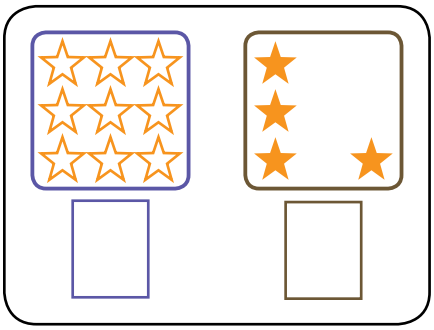
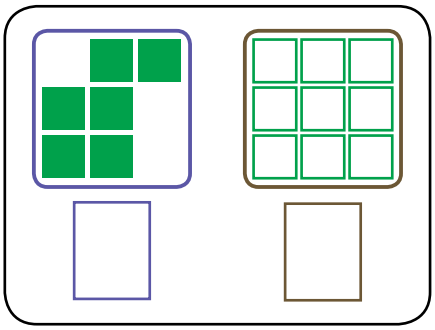
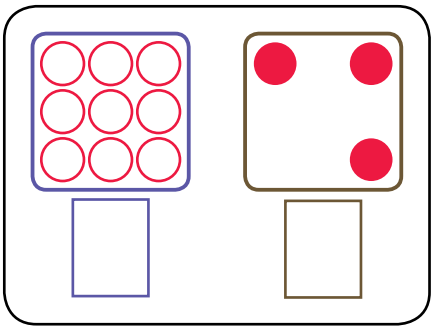
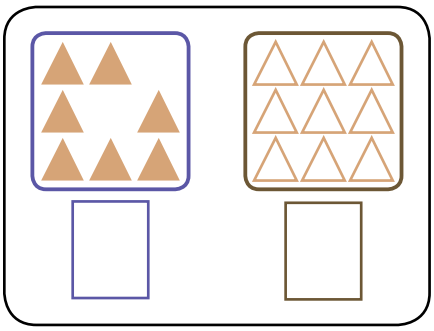
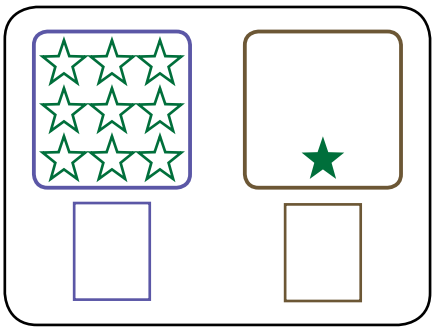
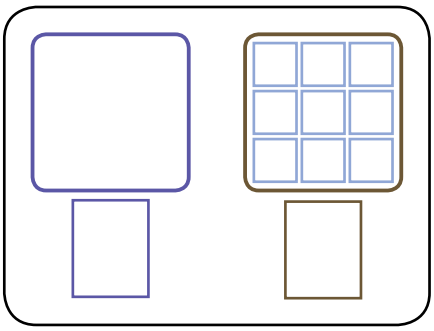
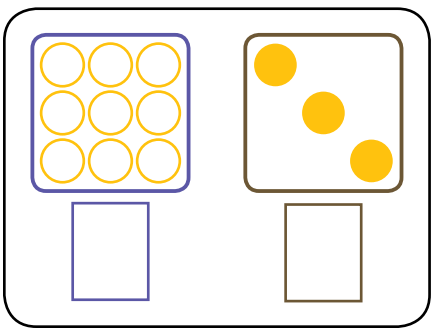
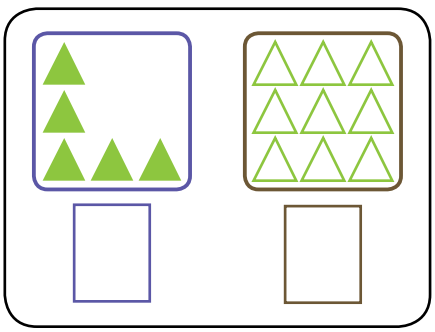
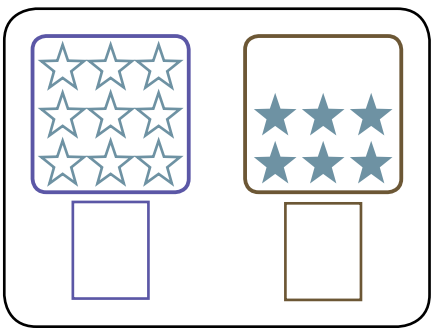
El número que se encuentra a la derecha de otro es mayor, es decir tiene más objetos, y le llamamos el número sucesor.

El número que se encuentra a la izquierda de otro es menor, es decir tiene menos objetos, y le llamamos el número antecesor.



Escribe el número que representa los círculos, cuadrados, triángulos y estrellas que se muestran.

Dibuja el número de círculos cuadrados, triángulos que el número antecesor o sucesor tiene y escribe el símbolo del número en el lugar correspondiente.

Aritmética

Primer Año



mtk Mathematiké

MORENO

Las Cuatro Dimensiones de los Números

Los Números Representan Personas, Animales y Objetos

Los números nos ayudan a conocer mejor el mundo en el que vivimos.

Todas las personas, animales y objetos que están en el mundo tienen un nombre con el cual los identificamos.


niño


niña


gato


perro


globo


manzana


árbol

Para entender mejor el mundo en el que vivimos a cada persona, animal y objeto le asignamos el número uno.


Un niño


Una niña


Un gato


Un perro


Un globo


Una manzana

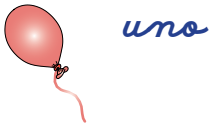

Un árbol

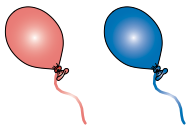
Los Números del Uno al Nueve

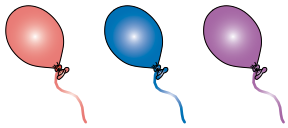
Cuando tenemos más de una persona, animal u objeto necesitamos más números.

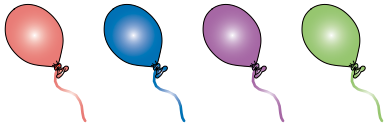
Contamos con los números que llamamos dígitos para crear todos los números.

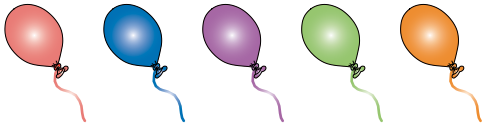



uno

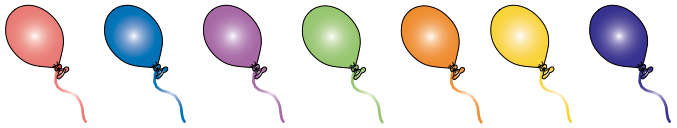

dos


tres

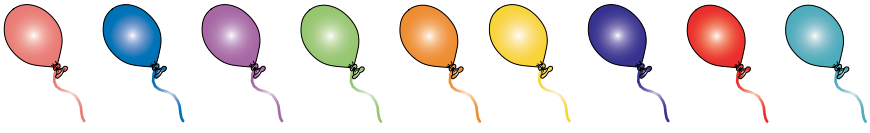

cuatro


cinco


seis


siete


ocho


nueve

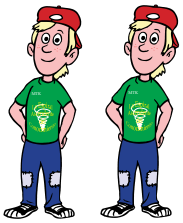
Los Números Se Representan Con Un Símbolo

Los números además de tener un nombre se representan con un símbolo.



1 globo

Un globo



2 niños

Dos niños



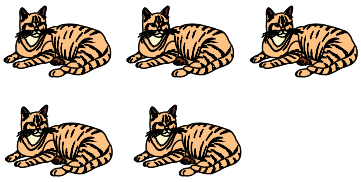
3 perros

Tres perros



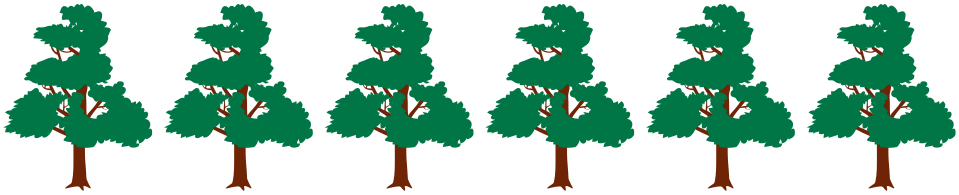
4 niñas

Cuatro niñas



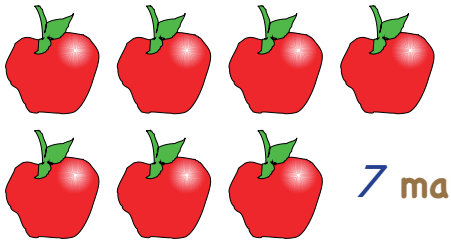
5 gatos

Cinco gatos



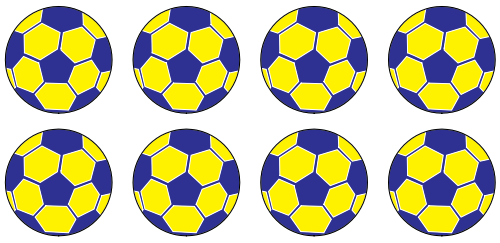
6 árboles

Seis árboles



7 manzanas

Siete manzanas



8 balones

Ocho balones



9 pericos

Nueve pericos

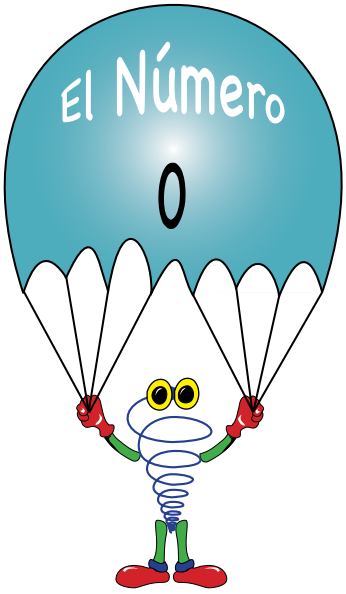
El Número Cero

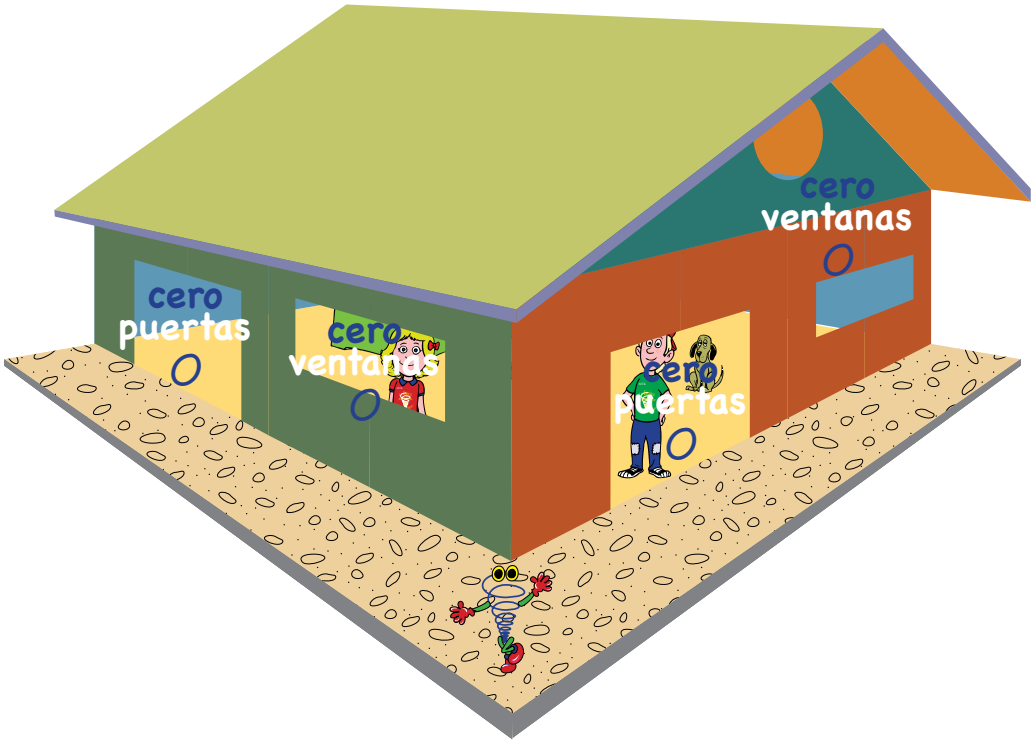
El número cero es muy especial.

El cero es el número que utilizamos para indicar que no hay ninguna persona, animal u objeto.



Si quitamos las ventanas y las puertas de la casa, podemos decir que hay cero ventanas y cero puertas.





Escritura de los Números

Es importante escribir los nombres de los números con caligrafía y ortografía correctas.

Observa cuidadosamente las flechas que indican la forma en la cual debes escribir el número y su nombre.

Siguiendo la dirección de las flechas escribe sobre las líneas punteadas el número y su nombre.

1 uno

2 dos

3 tres

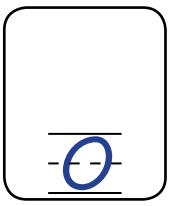
4 cuatro

5 cinco

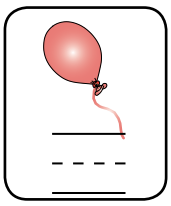
Ejercicios Para Desarrollar la Habilidad

Los nombres y los símbolos de los números del **cero** al 9.

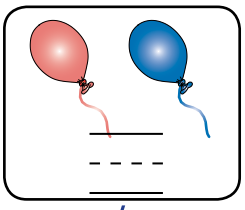
Escribe el símbolo que corresponde al número de globos y al nombre.



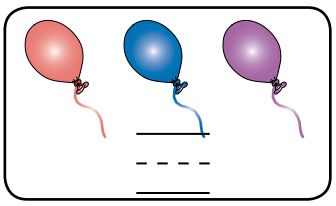
cero



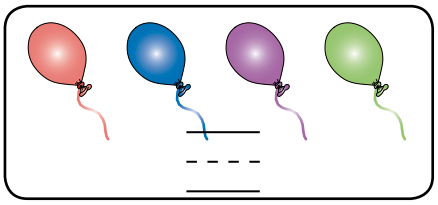
uno



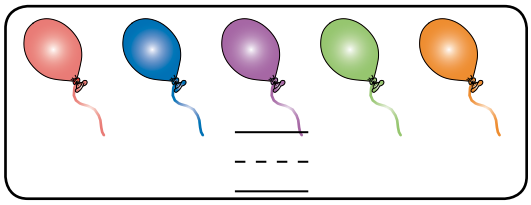
dos



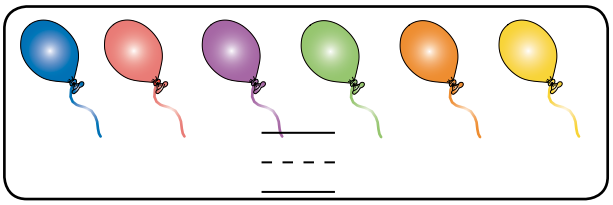
tres



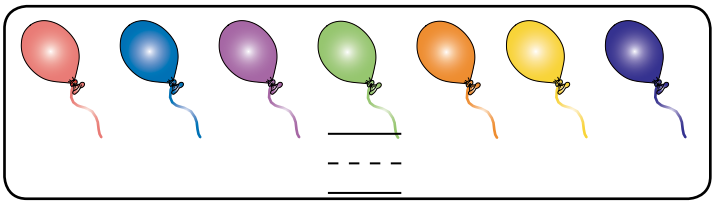
cuatro



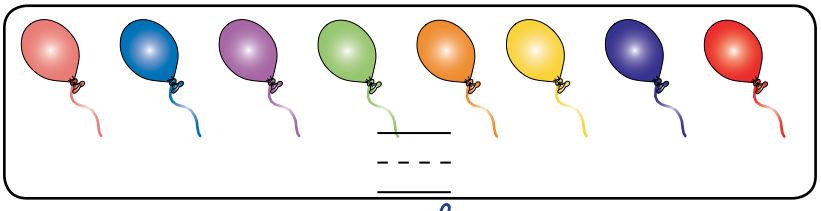
cinco



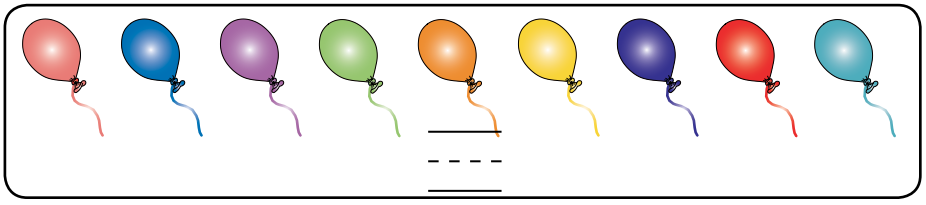
seis



siete



ocho



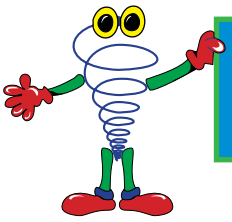
nueve

Ejercicios Para Desarrollar la Habilidad

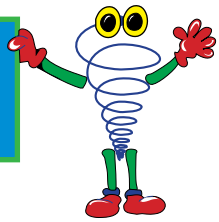
Los nombres y los símbolos de los números del cero al 9.

Donde está el nombre del número, escribe su símbolo y donde está el símbolo escribe su nombre.

☐	cero	0	_____
☐	uno	1	_____
☐	dos	2	_____
☐	tres	3	_____
☐	cuatro	4	_____
☐	cinco	5	_____
☐	seis	6	_____
☐	siete	7	_____
☐	ocho	8	_____
☐	nueve	9	_____



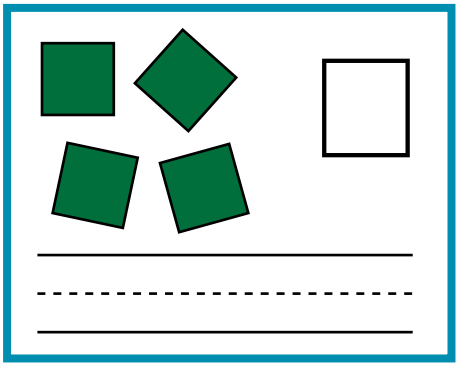
Ejercicios Para Practicar

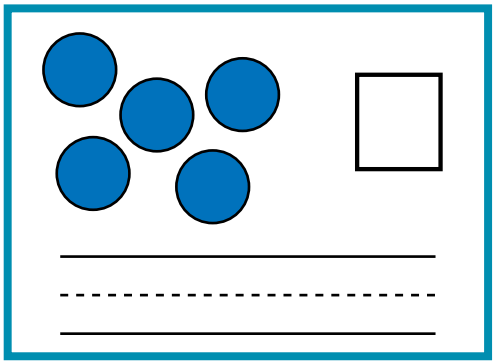


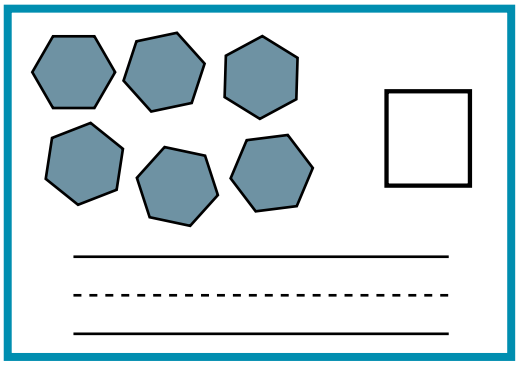
Colorea la cantidad de círculos que el número indica y escribe el nombre del número.

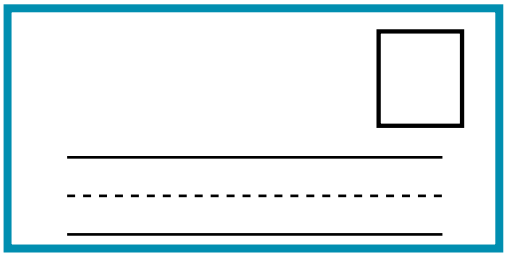
0	cero	○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
1		○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
2		○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
3		○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
4		○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
5		○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
6		○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
7		○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
8		○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
9		○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

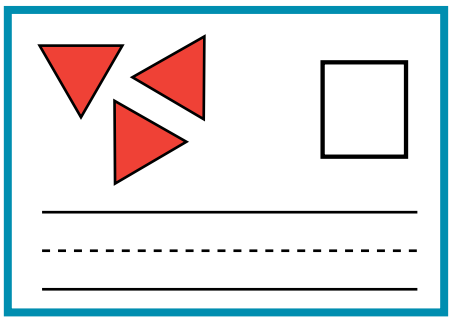
Cuenta los objetos y escribe el número y su nombre.

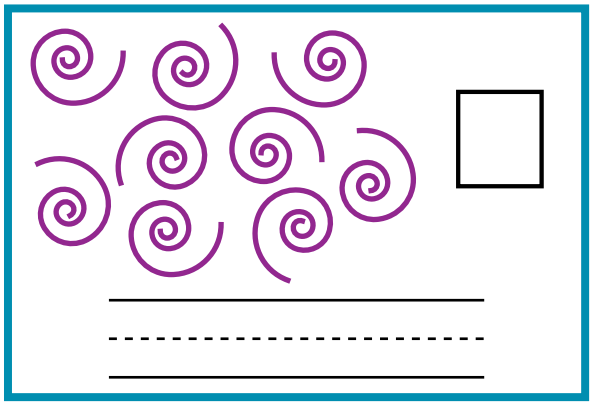


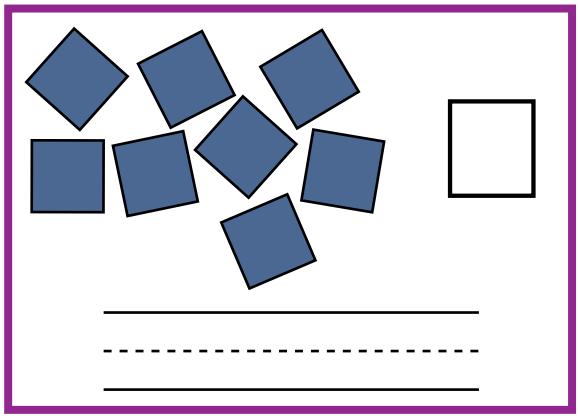


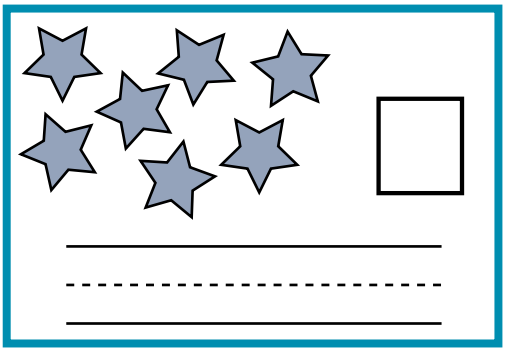


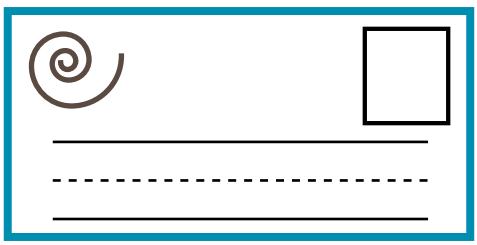


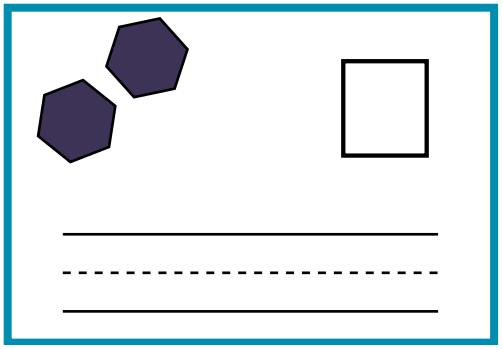


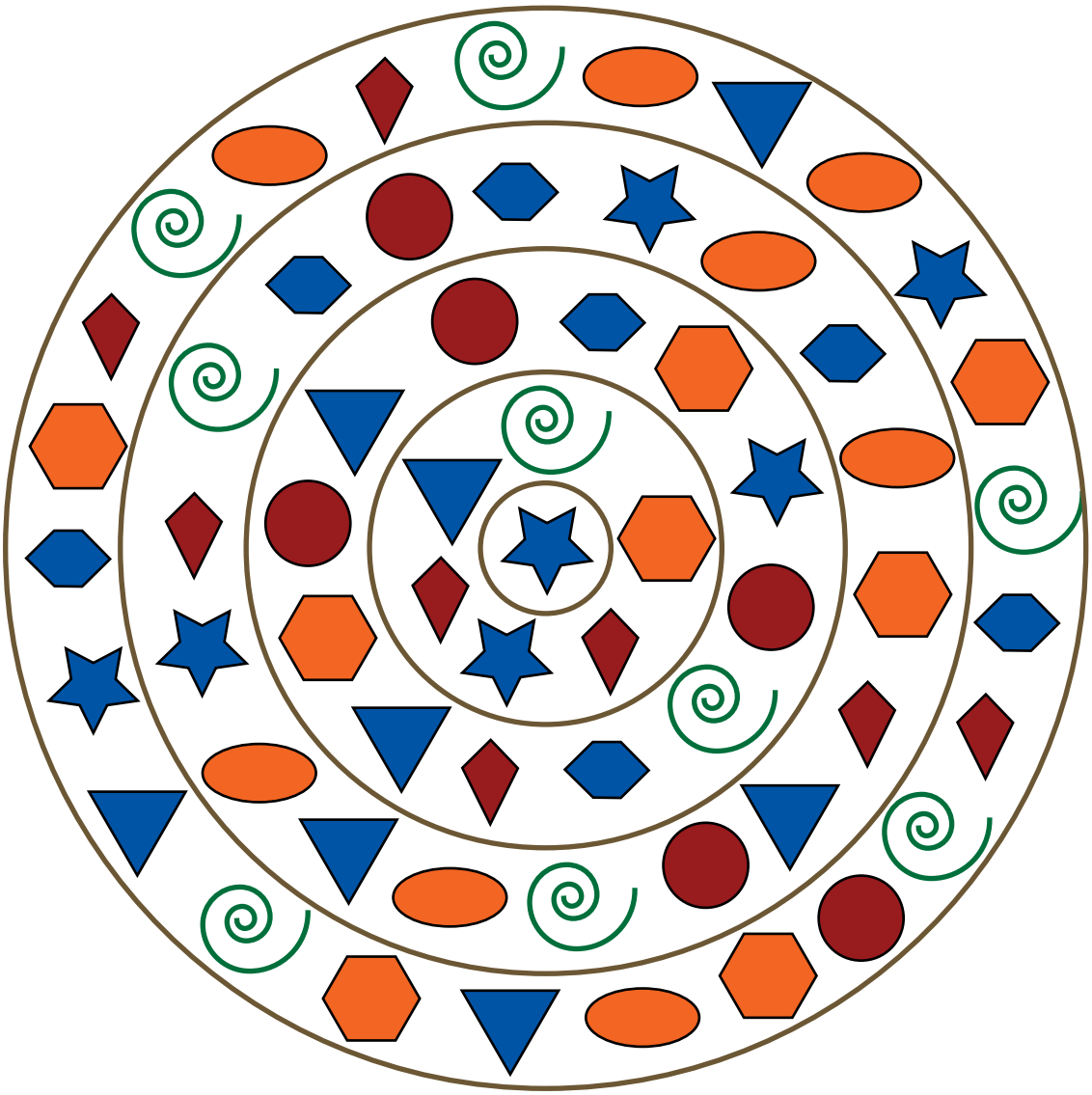


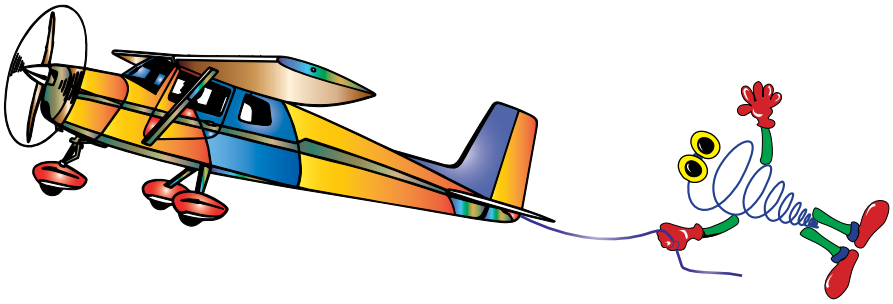






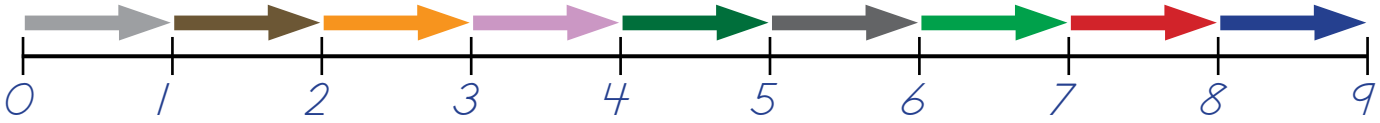






Los Números Naturales También Representan Dimensiones

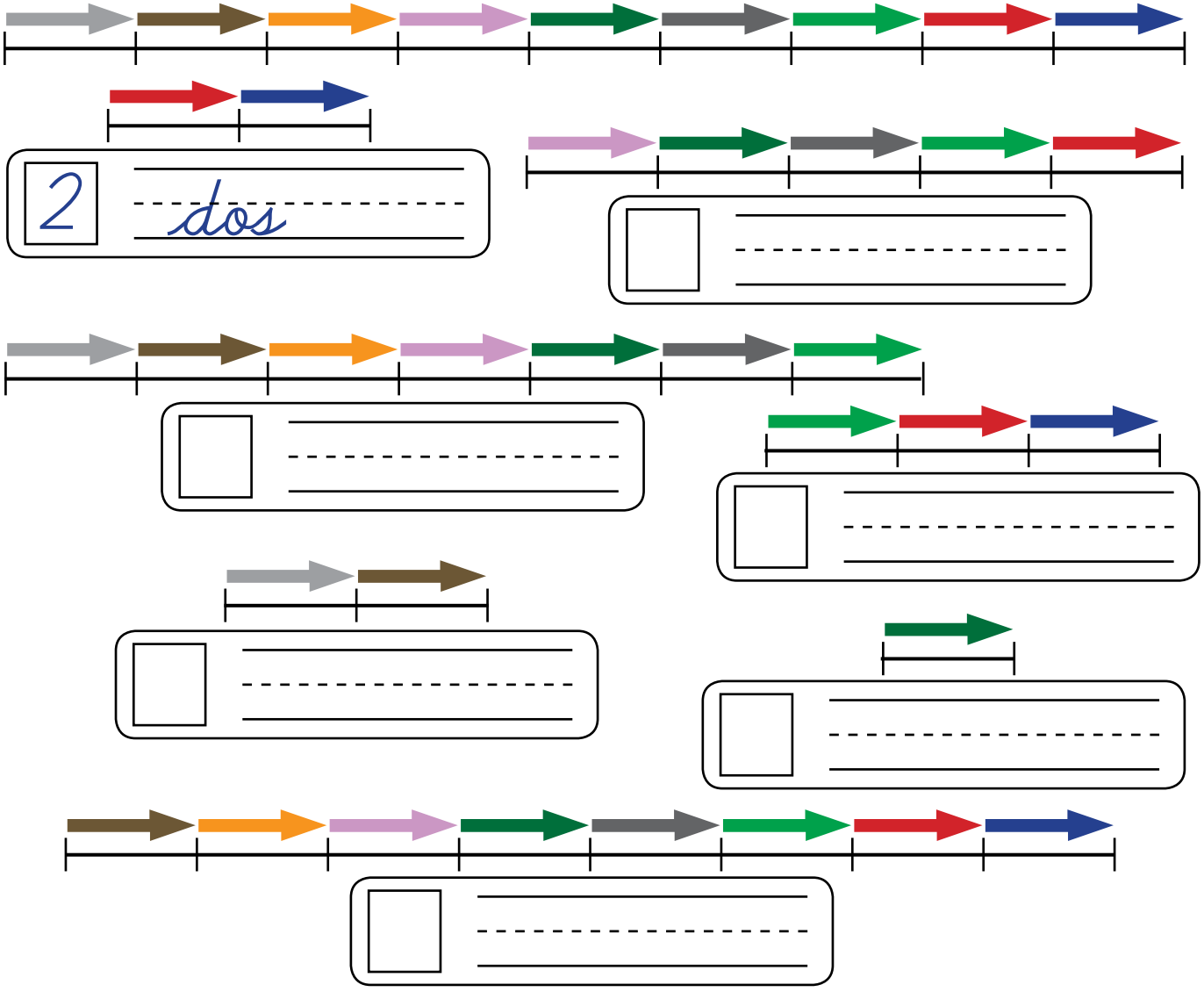
La Recta de los Números

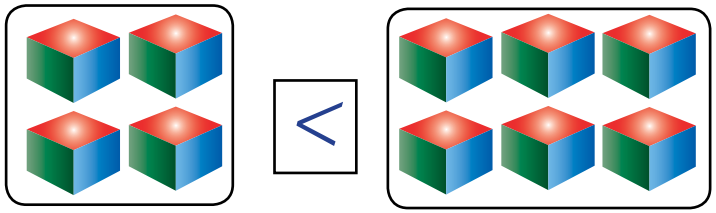


Utilizamos vectores, flechas, para medir la distancia.

Cada vector representa uno.

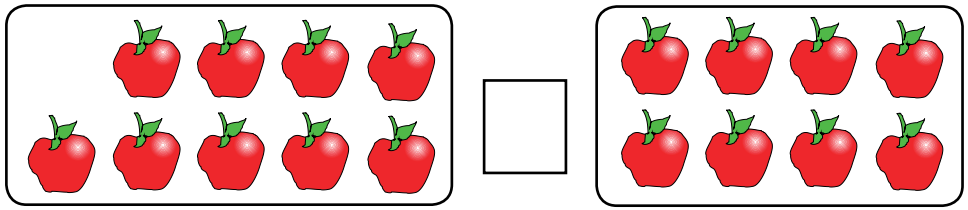
Escribe el número de unidades que tiene cada pedazo de recta utilizando el símbolo y el nombre.

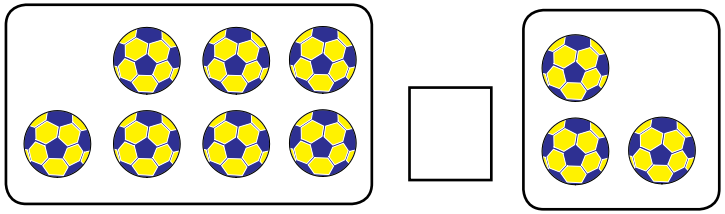


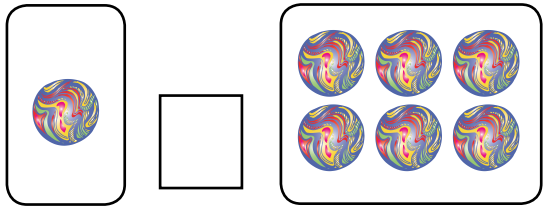


4 < 6

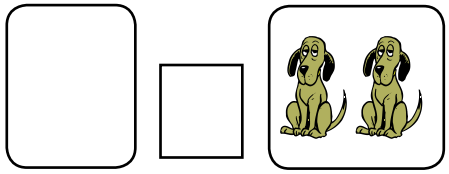
cuatro menor que seis

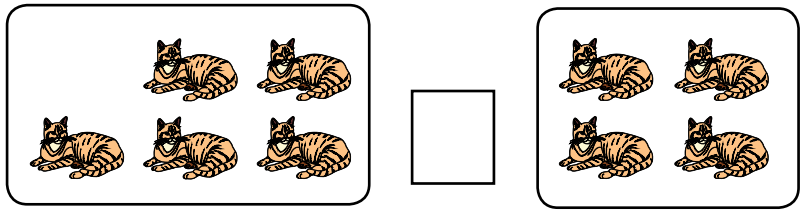






Escribe el símbolo y el nombre de la relación que guardan los conjuntos y los números.





7 > 5

siete mayor que cinco

0 ☐ 1

2 ☐ 9

8 ☐ 9

5 ☐ 6

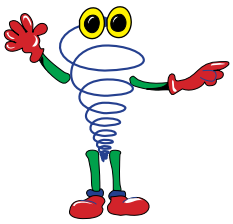
4 ☐ 2

8 ☐ 4

6 ☐ 3

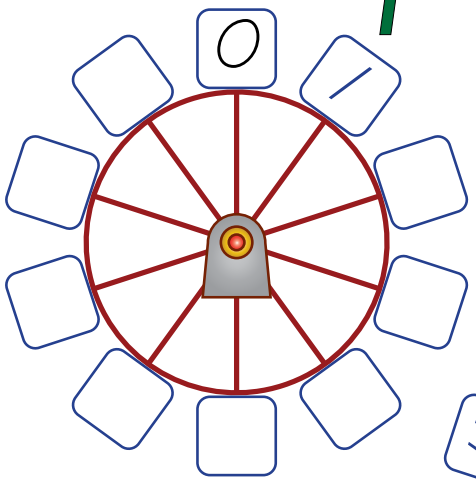
3 ☐ 5

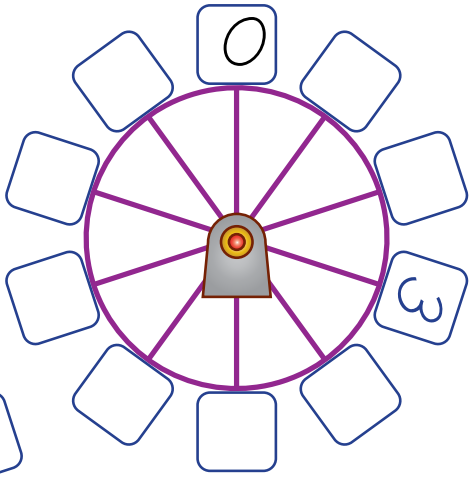
7 ☐ 0

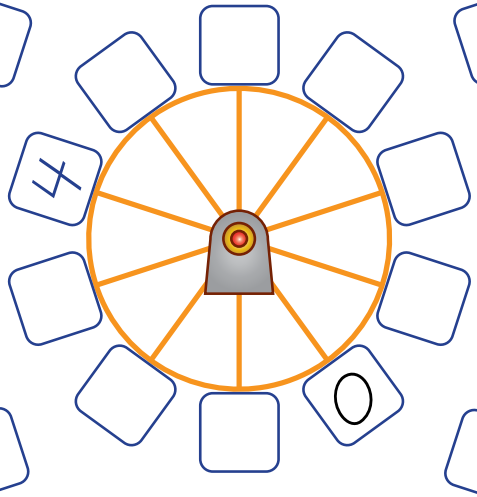


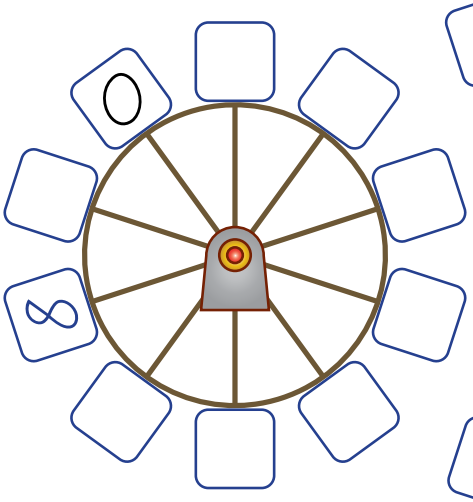


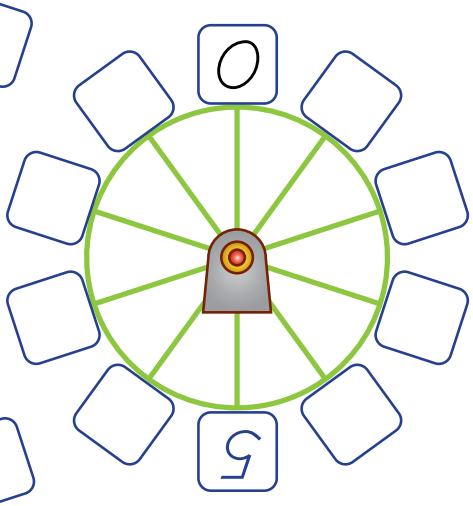
Estudia cuidadosamente las series de números y escribe en el espacio indicado los números que faltan.

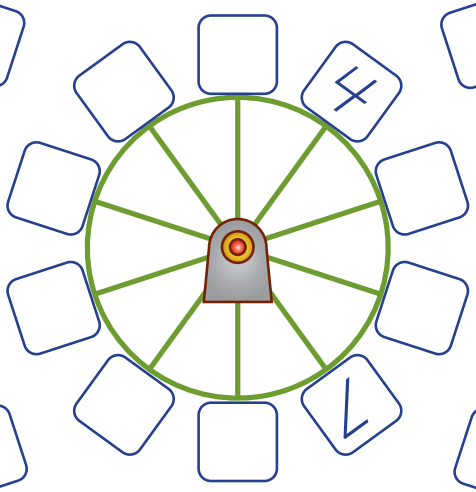


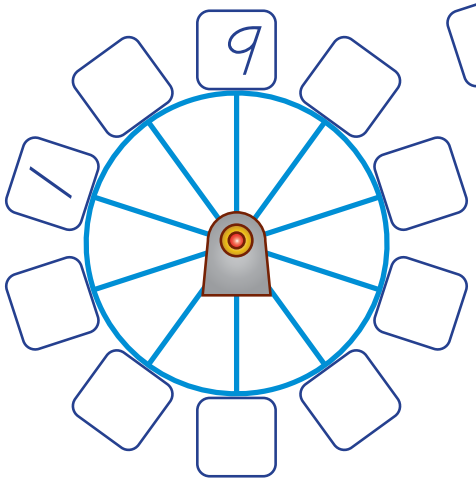


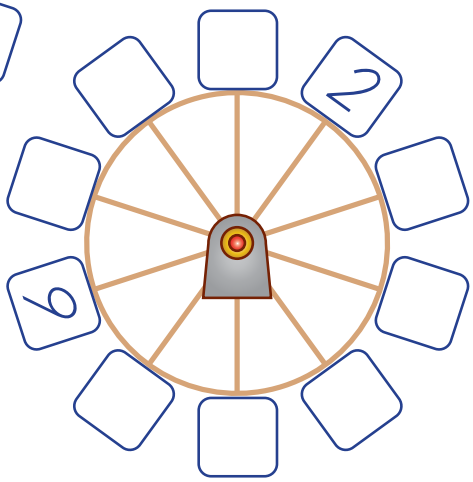


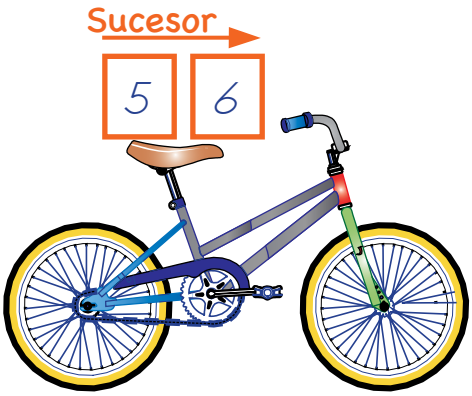












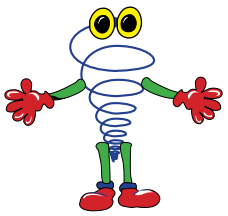
Sucesor

El número que viene después.



Antecesor

El número que viene antes.

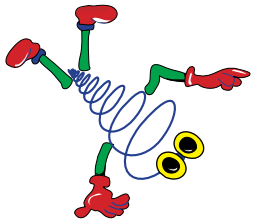


Escribe el sucesor y antecesor de los números.

☐ 8 ☐	☐ 2 ☐	☐ 5 ☐
☐ 3 ☐	☐ 4 ☐	☐ 6 ☐
☐ 7 ☐	☐ 8 ☐	☐ 3 ☐
☐ 8 ☐	☐ 3 ☐	☐ 2 ☐
☐ 5 ☐	☐ 8 ☐	☐ 6 ☐
☐ 1 ☐	☐ 5 ☐	☐ 1 ☐
☐ 7 ☐	☐ 6 ☐	☐ 4 ☐

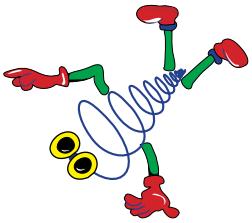
mayor que

8 > 5



menor que

3 < 6



Escribe el símbolo > (mayor que) y el símbolo < (menor que) que corresponde a los números.

3 > 5	6 ☐ 0	8 ☐ 1
1 ☐ 2	5 ☐ 7	2 ☐ 4
4 ☐ 8	9 ☐ 3	0 ☐ 6
7 ☐ 9	3 ☐ 2	5 ☐ 4
0 ☐ 6	2 ☐ 8	6 ☐ 3
9 ☐ 1	7 ☐ 5	4 ☐ 8
1 ☐ 7	2 ☐ 9	6 ☐ 4
3 ☐ 8	2 ☐ 5	7 ☐ 6

Ejercicios Para Desarrollar la Habilidad

Escribe dentro del cuadro si el número es:

< menor que

> mayor que

= igual que

54 ☐ 60	11 ☐ 11
7 ☐ 70	26 ☐ 62
10 ☐ 8	45 ☐ 28
37 ☐ 28	17 ☐ 59
48 ☐ 84	59 ☐ 17
29 ☐ 30	59 ☐ 59
88 ☐ 88	94 ☐ 45
15 ☐ 25	45 ☐ 94
83 ☐ 93	45 ☐ 45

La Columna de las Unidades



Los Números del 1 al 9

A la primer columna le llamamos columna de las unidades.

La columna tiene nueve espacios donde colocamos las unidades, es decir los unos.

Tenemos solamente nueve espacios, ya que únicamente contamos con los nueve dígitos y el cero para construir todos los números.

La columna de las unidades la representamos con el color azul.

A cada uno de los gatos lo representamos con el número 1.

Colocamos cuatro unos para representar que tenemos cuatro gatos.

Cuando queremos representar que la columna está vacía, es decir que no tenemos ningún objeto, usamos el cero.

Unidades
●
●
●
●



/
/
/
/

4

Unidades
/
/
/
/

/
+ /
/
/
4

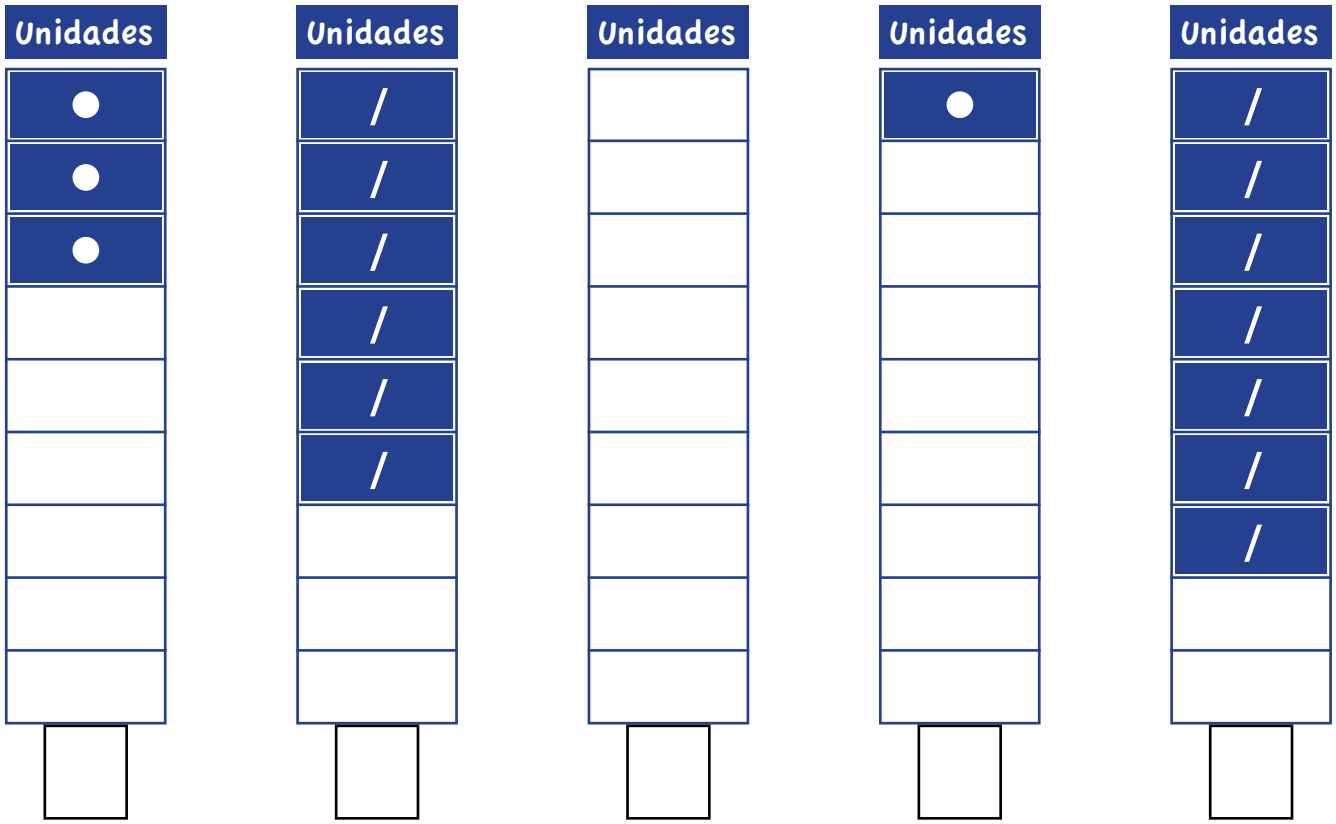
Unidades

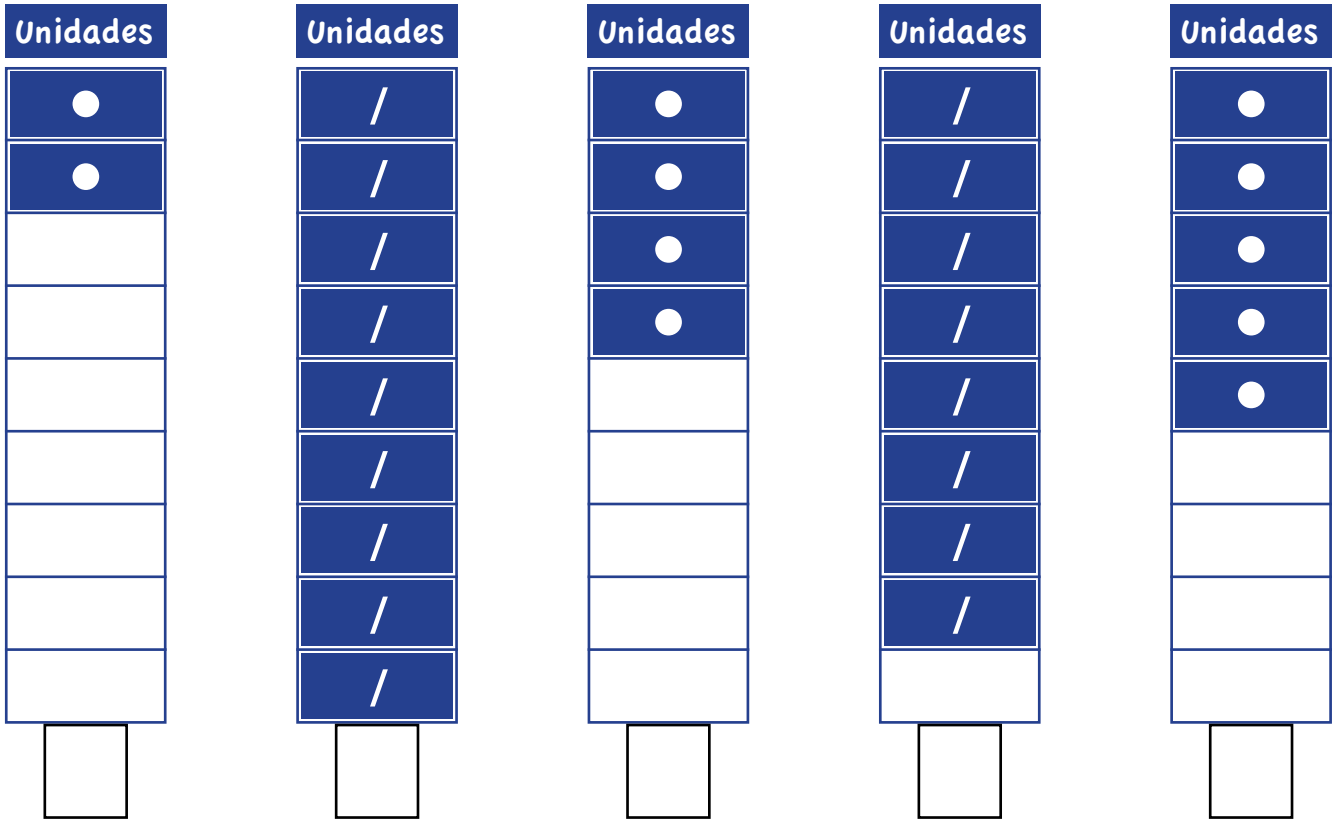
0

/ + / + / + / = 4

Ejercicios Para Practicar

Efectúa la suma y escribe el número de unidades representadas en cada una de las columnas.





La Columna de las Decenas



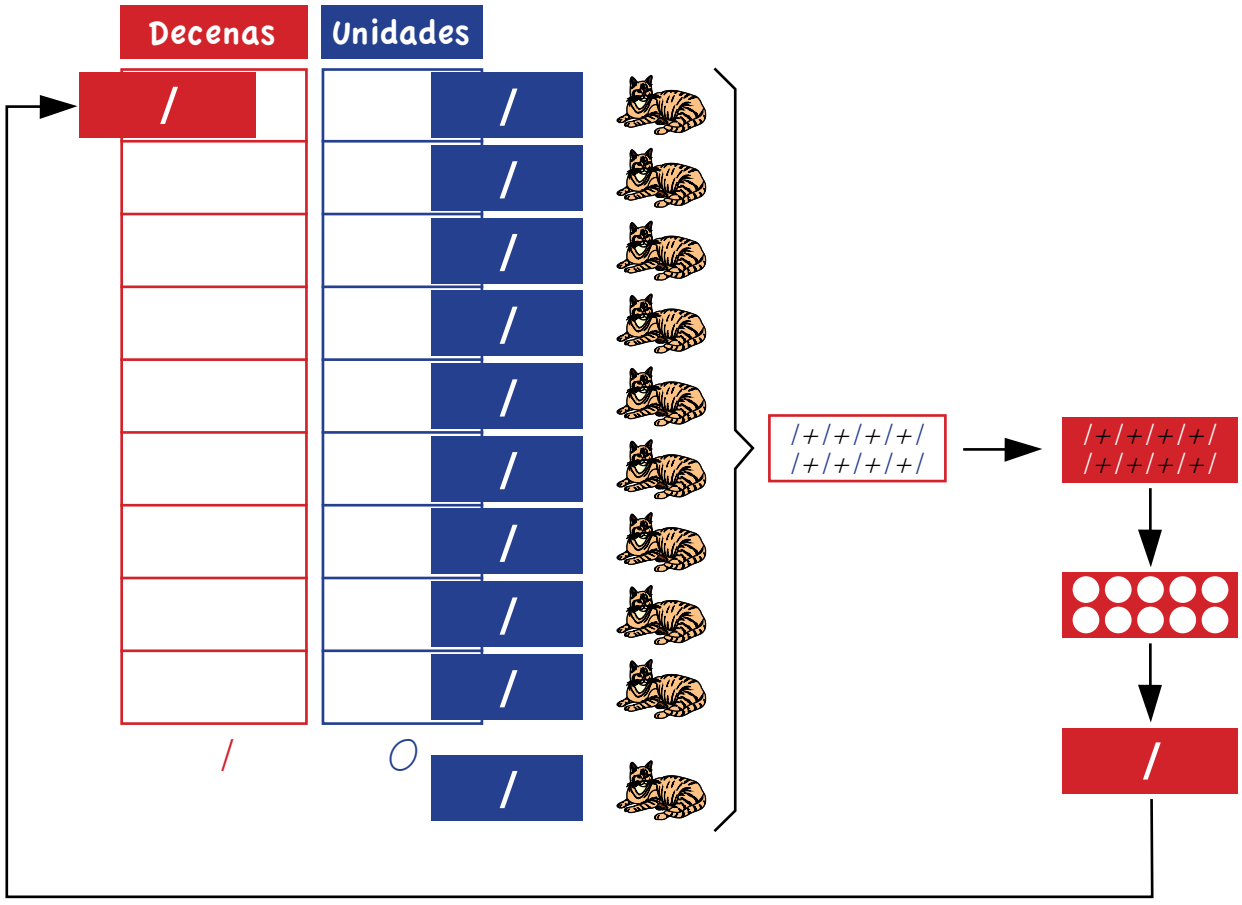
Los Números del 10 al 99

A la segunda columna le llamamos columna de las decenas.

Para construir una decena, necesitamos nueve unidades más uno.

Cada columna tiene únicamente nueve espacios, por lo cual para sumar nueve más uno, necesitamos crear una nueva unidad a la que llamamos decenas.

La columna de las decenas la representamos con el color rojo.



Las nueve unidades más uno las representamos creando una decena, diez, la cual colocamos en la columna de la izquierda.

El número que hemos creado se llama diez y lo representamos como 10.

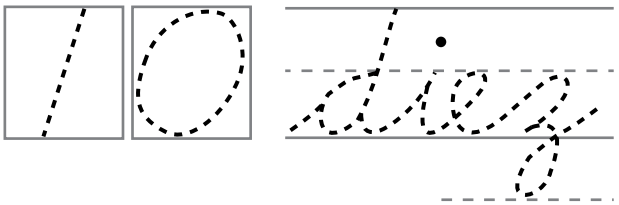
Ejercicios Para Desarrollar la Habilidad

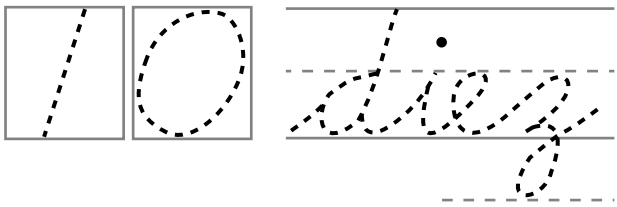
El nombre del número 10.

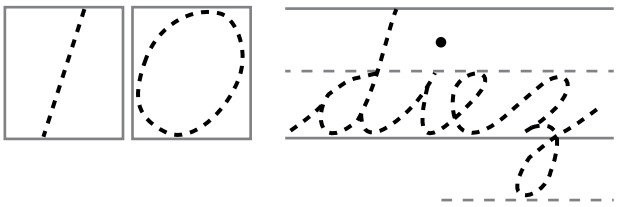
Siguiendo la dirección de las flechas escribe sobre las líneas punteadas el número 10 y su nombre.

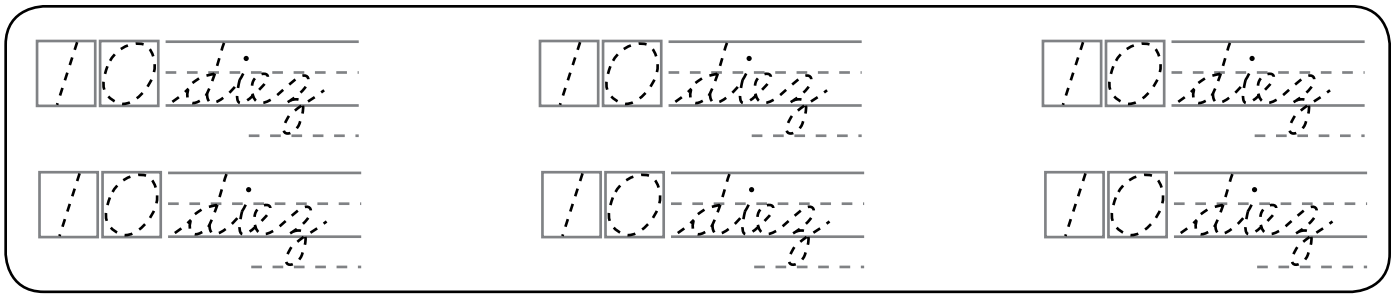
Donde está el nombre del número, escribe su símbolo y donde está el símbolo escribe su nombre.

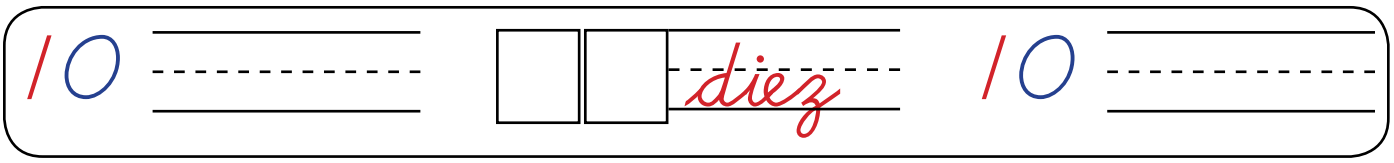


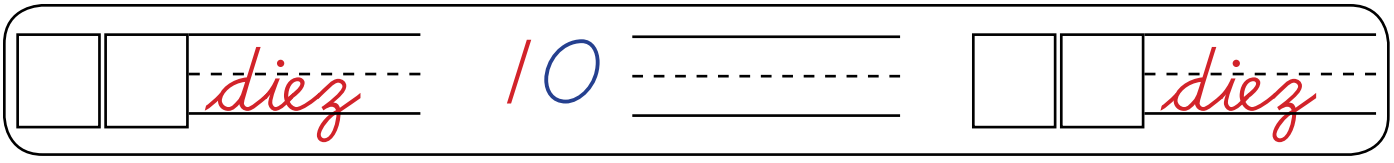


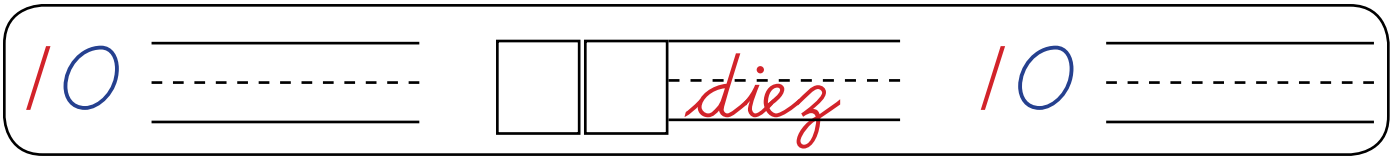


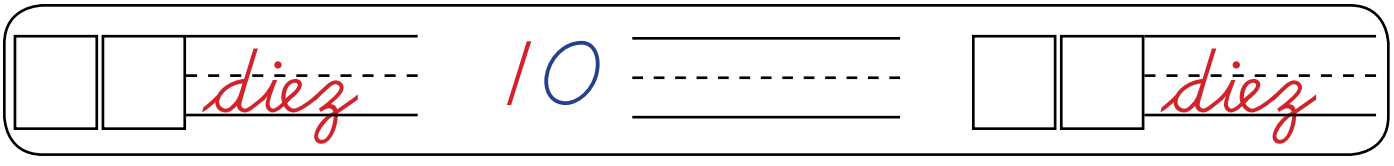






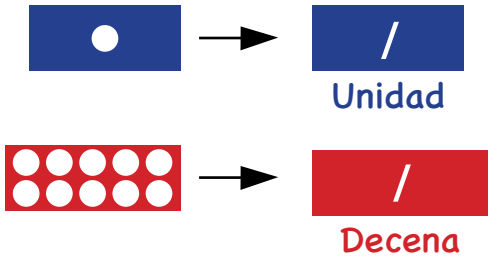






Una decena, es decir 1 en la columna de las decenas, representa diez unidades.

A una decena, 1 en la columna de las decenas, le sumamos unos en la columna de las unidades para formar 10 nuevos números.



Decenas	Unidades
/	/

1 1

10 + 1 = 11

Decenas	Unidades
/	/
	/
	/
	/

1 4

10 + 4 = 14

Decenas	Unidades
/	/
	/
	/
	/
	/
	/
	/

1 7

10 + 7 = 17

Los Nombres de los Números

10 + 1 = 11 once
10 + 2 = 12 doce
10 + 3 = 13 trece
10 + 4 = 14 catorce
10 + 5 = 15 quince

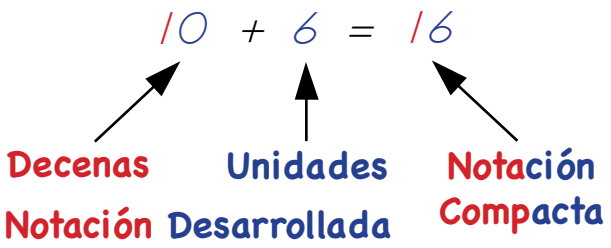
Nombres especiales que no están compuestos de nombre y apellido.

10 + 6 = 16 dieciséis
10 + 7 = 17 diecisiete
10 + 8 = 18 dieciocho
10 + 9 = 19 diecinueve

El nombre es la columna de las decenas y el apellido es el número de la columna de las unidades.

Notación de los Números

Cuando el número lo escribimos como la suma de la decena más las unidades, a esta expresión le llamamos notación desarrollada.

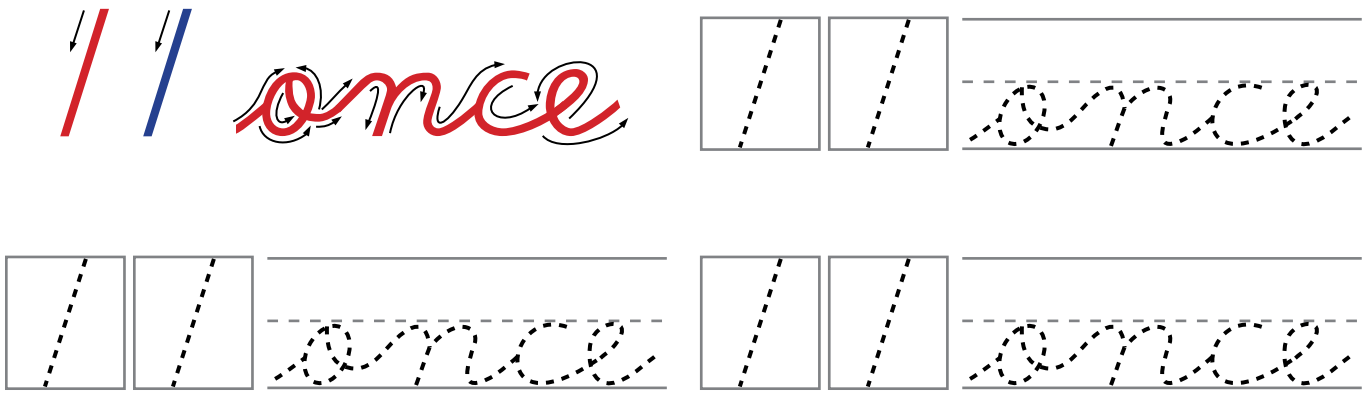


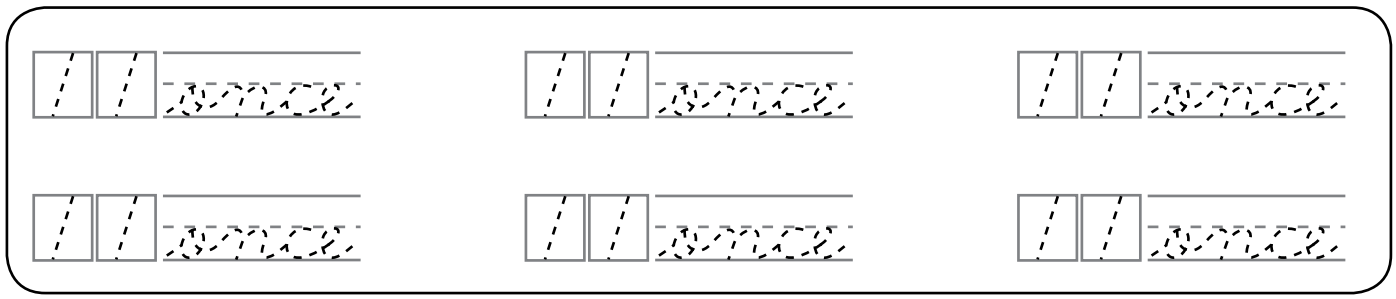
Escritura de los Números

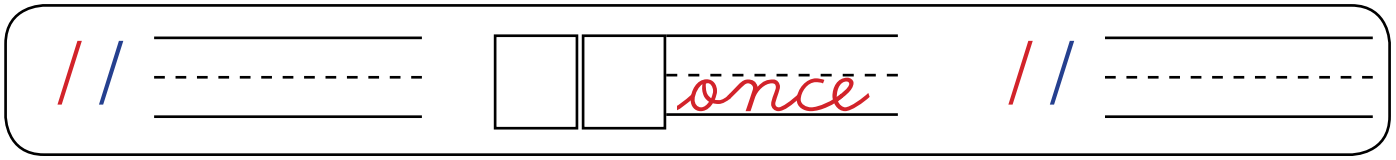
Siguiendo la dirección de las flechas escribe sobre las líneas punteadas el número y su nombre.

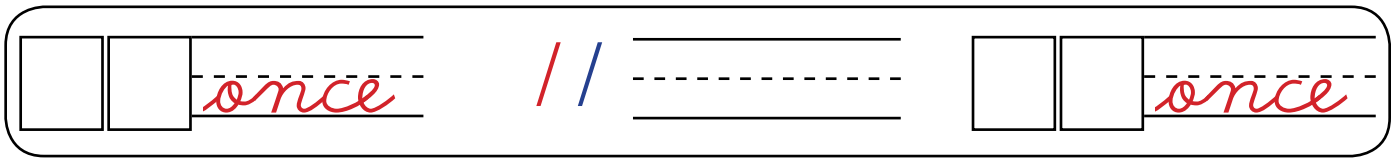
Donde está el nombre del número, escribe su símbolo y donde está el símbolo escribe su nombre.

11 once









16 dieciséis

16 dieciséis

16 dieciséis

16 dieciséis 16 dieciséis 16 dieciséis

16 dieciséis 16 dieciséis 16 dieciséis

16 dieciséis

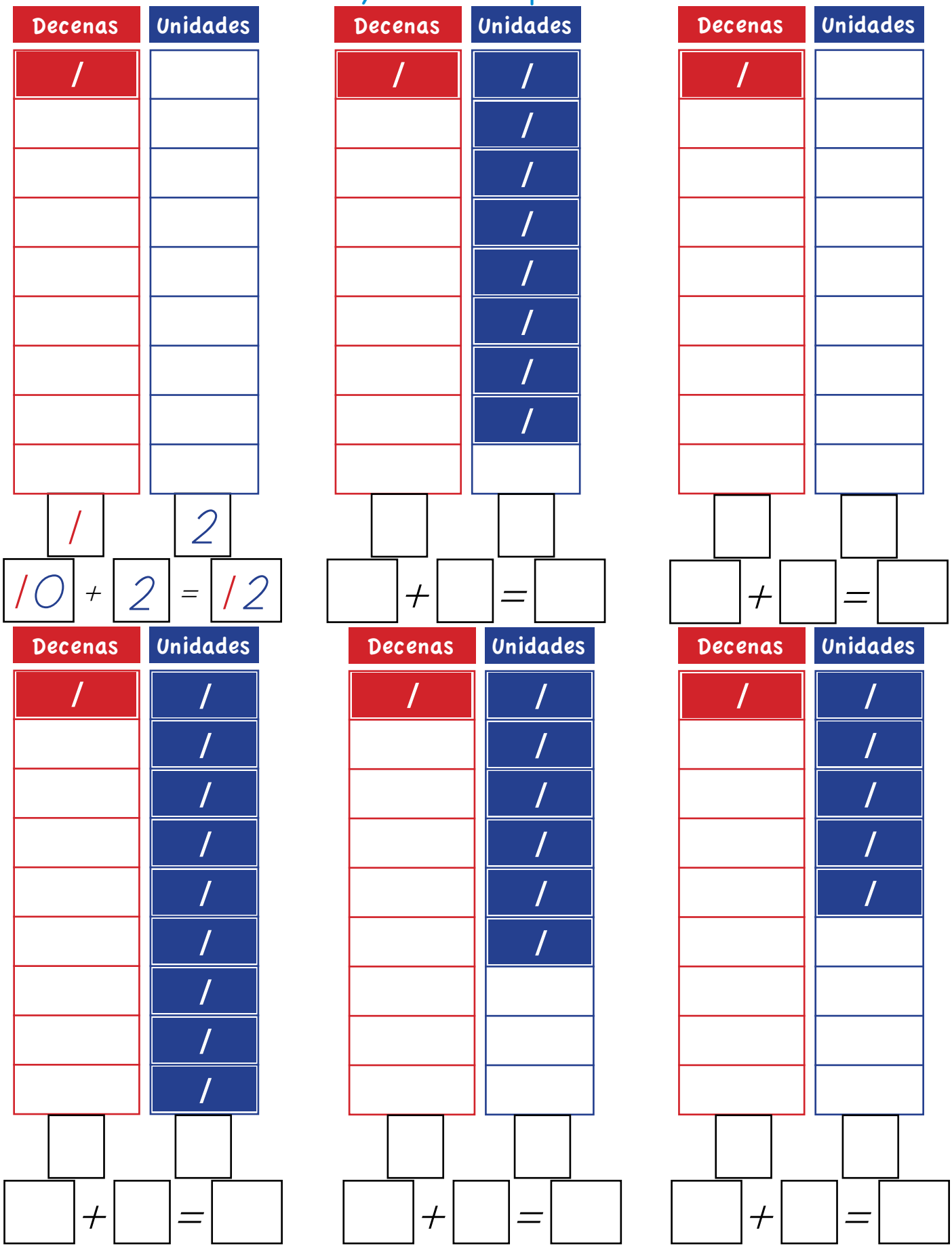
16 dieciséis

16 dieciséis

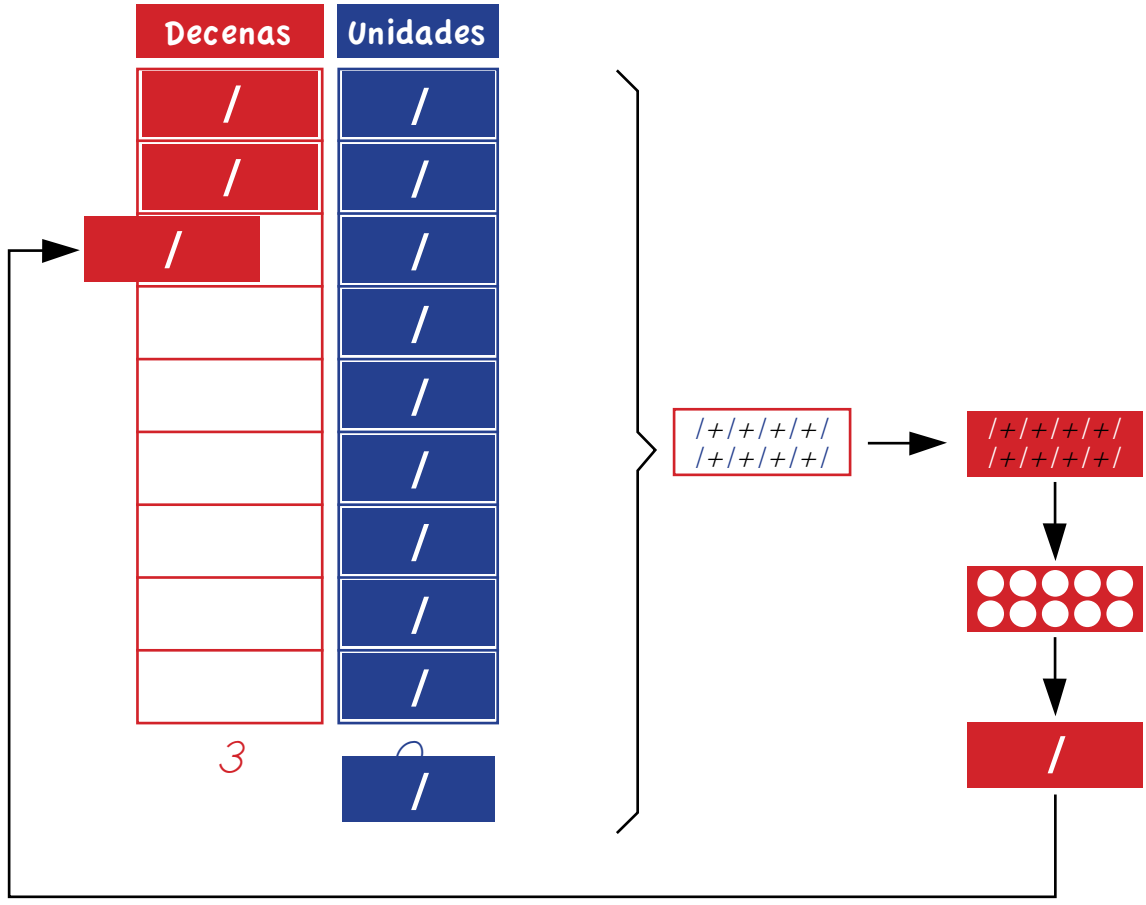
16 dieciséis

16 dieciséis

Escribe debajo de las columnas el valor que las fichas representa y escribe el número en notación desarrollada y notación compacta.



Para construir el siguiente número sumamos 29 + 1. Creamos una decena la pasamos a la columna de la izquierda. El nuevo número es 30; y su nombre es treinta.



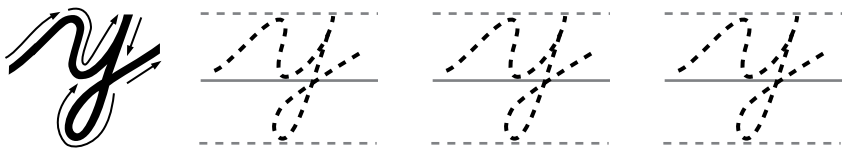
30 treinta

Donde está el nombre del número, escribe su símbolo y donde está el símbolo escribe su nombre.

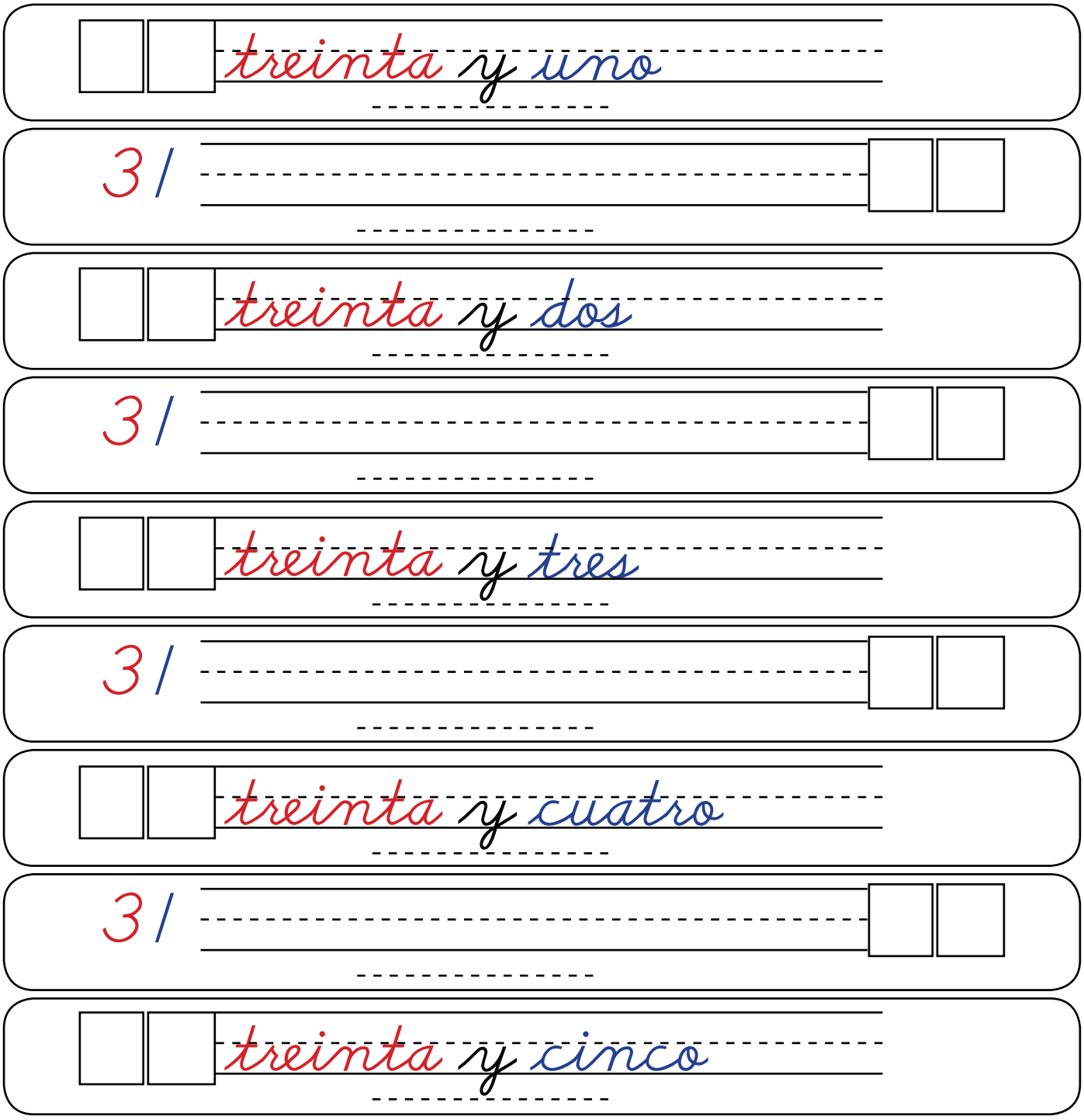
30 treinta

30 treinta

Practica escribiendo la letra y.



Donde está el nombre del número, escribe su símbolo y donde está el símbolo escribe su nombre.



Ejercicios Para Desarrollar la Habilidad

Escribe en notación desarrollada el valor de los números.

17 = 10 + 7 41 = _____ 58 = _____

36 = _____ 82 = _____ 24 = _____

69 = _____ 14 = _____ 85 = _____

71 = _____ 63 = _____ 15 = _____

99 = _____ 37 = _____ 82 = _____

35 = _____ 75 = _____ 28 = _____

59 = _____ 15 = _____ 31 = _____

69 = _____ 24 = _____ 77 = _____

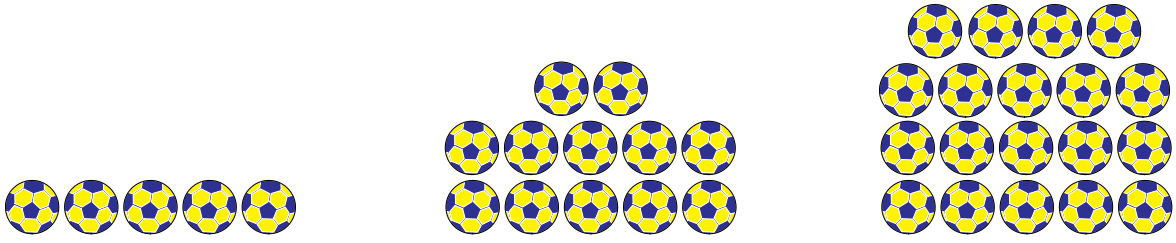
23 = _____ 34 = _____ 46 = _____

73 = _____ 18 = _____ 94 = _____

57 = _____ 79 = _____ 48 = _____

El Orden de los Números

Recordemos que al escribir una serie de números, los escribimos de menor a mayor. Es decir, los números crecen de izquierda a derecha.



5 12 19

5 **Es menor que** 12 12 **Es menor que** 19

27 28 29 30 31 32 33 34 35

Decrece ← **Crece** →

< **Menor que** > **Mayor que**

Podemos representar el orden de los números de dos formas diferentes:

Escribiendo primero el número menor y después el mayor.

31 35

Menor **Mayor**

31 < 35

31 es menor que 35

Escribiendo primero el número mayor y después el menor.

35 31

Mayor **Menor**

35 > 31

35 es mayor que 31

75 76 77 78 79 80 81 82 83

78 < 82

78 es menor que 82

78 > 75

78 es mayor que 75

Ejercicios Para Desarrollar la Habilidad

Escribe dentro del cuadro si el número es:

< menor que

> mayor que

= igual que

54 ☐ 60

7 ☐ 70

10 ☐ 8

37 ☐ 28

48 ☐ 84

29 ☐ 30

88 ☐ 88

15 ☐ 25

83 ☐ 93

11 ☐ 11

26 ☐ 62

45 ☐ 28

17 ☐ 59

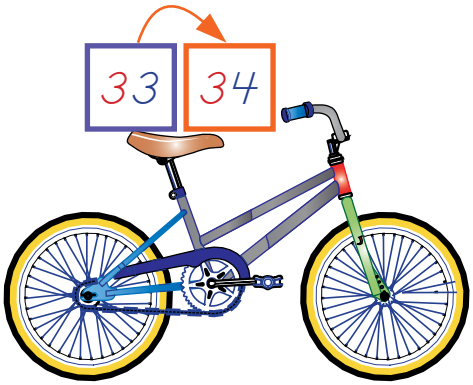
59 ☐ 17

59 ☐ 59

94 ☐ 45

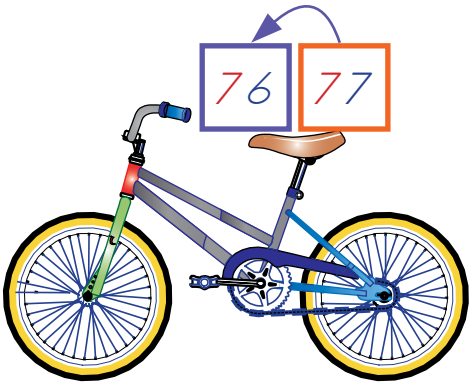
45 ☐ 94

45 ☐ 45



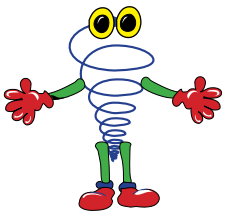
Sucesor

El número que viene después.



Antecesor

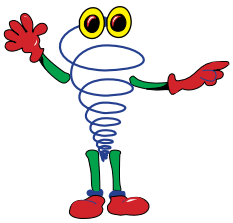
El número que viene antes.



	20	
	98	
	34	
	61	
	17	
	26	
	33	
	89	

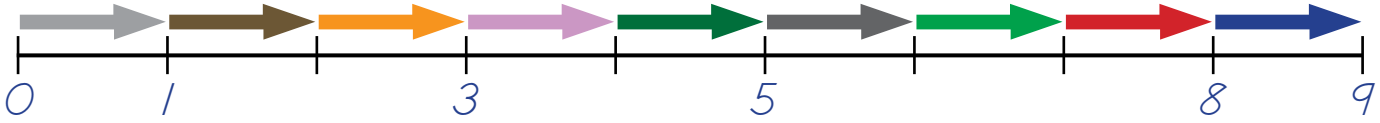
	12	
	35	
	55	
	46	
	81	
	68	
	60	
	73	

	87	
	39	
	47	
	71	
	24	
	54	
	62	
	97	





Escribe en la recta de los números los números que faltan.



Ahora escribimos los números de la recta del mayor al menor. Escribe en el espacio vacío, el número que falta.

9 ___ 7 6 ___ ___ 3 2 ___ 0

También podemos formar series en las cuales vamos brincando de número en número, siguiendo un determinado patrón. Por ejemplo, brincando de dos en dos números.

10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25,

Brincando de dos en dos, formamos la siguiente serie de números:

10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24,

Brincando de dos en dos números es equivalente a ir sumando **2** para formar la serie.

Ahora vamos brincando de tres en tres números.

10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25,

Brincando de tres en tres, formamos la siguiente serie de números:

10, 13, 16, 19, 22, 25,

Brincando de tres en tres números es equivalente a ir sumando **3** para formar la serie.

Brincando, es decir recorriendo la recta de los números, de derecha a izquierda, también podemos formar series.

10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25,



Brincando de dos en dos de derecha a izquierda, formamos la siguiente serie de números:

25, 23, 21, 19, 17, 15, 13, 11,

Brincando de dos en dos números de derecha a izquierda es equivalente a ir restando **2** para formar la serie.

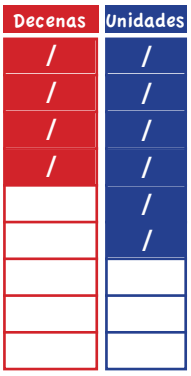
Escribe en el espacio vacío el número de la serie que falta.

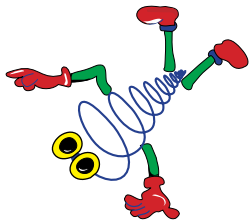
2,	___	6,	8,	___	12,	___	___	18,	___	22
11,	___	9,	___	___	6,	___	4,	___	___	1
0,	___	8,	___	16,	20,	___	28,	32,	___	40
24,	___	___	18,	16,	___	12,	___	8,	___	4
20,	___	30,	___	40,	45,	___	55,	___	65,	___

Completa la serie escribiendo los números que faltan.

2,	4,	___	___	___	___	___	___	___	___	___
1,	3,	___	___	___	___	___	___	___	___	___
5,	10,	___	___	___	___	___	___	___	___	___
0,	10,	___	___	___	___	___	___	___	___	

Ejercicios Para Practicar con el Material Didáctico

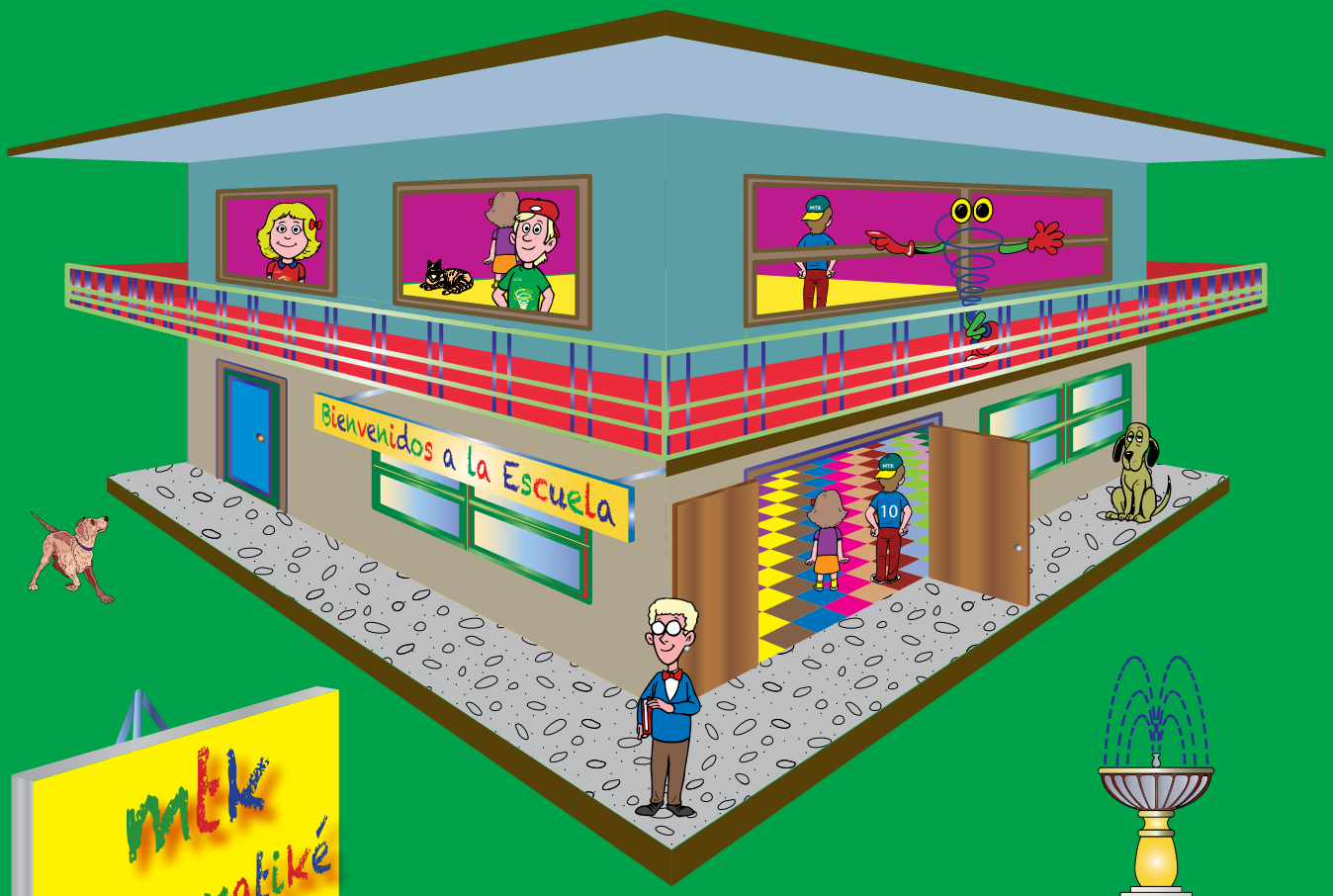




Utilizando las Columnas Numéricas del material didáctico escribe los números.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

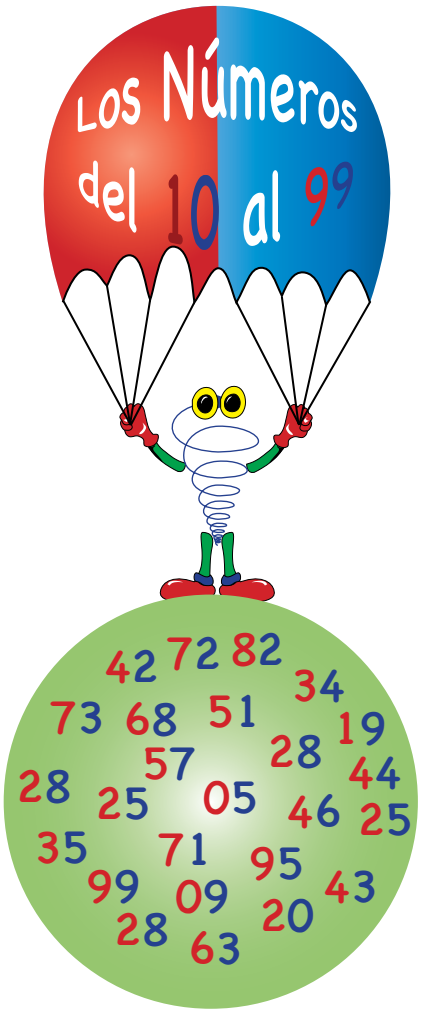
Aritmética
Segundo Año





MORENO

Dinámica Básica del Sistema de Numeración Decimal



Los Números del 0 al 99

Escribe el Número y Su Nombre

Decenas	Unidades
/	/
/	/
/	/
/	/
/	/
	/
	/
	/

58

Cincuenta y ocho

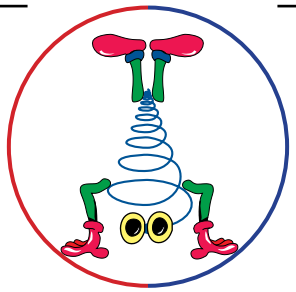
Decenas	Unidades
/	/
	/
	/

Decenas	Unidades
/	/
/	
/	

Decenas	Unidades

Decenas	Unidades

Decenas	Unidades



Decenas	Unidades

Decenas	Unidades

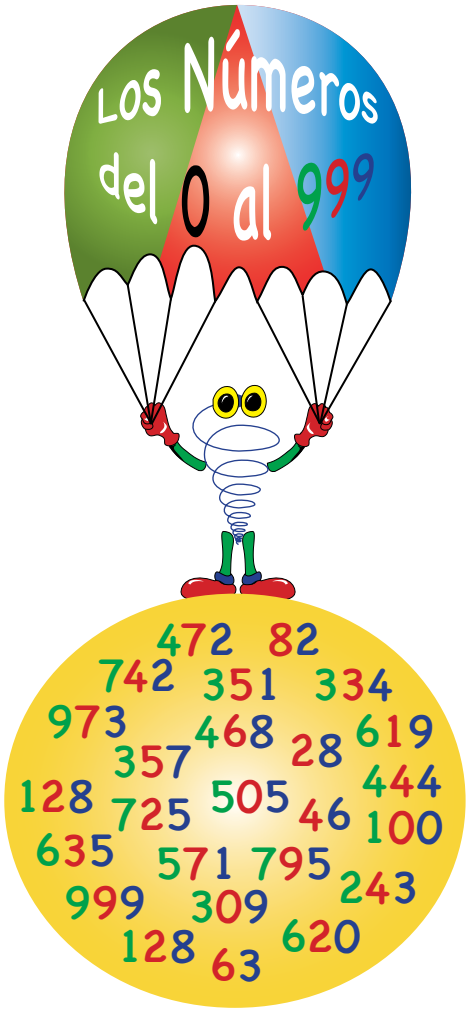
Decenas	Unidades



Utilizando las Columnas Numéricas del 0 al 999 representa los números. Escribe su nombre y exprésalos en notación desarrollada.

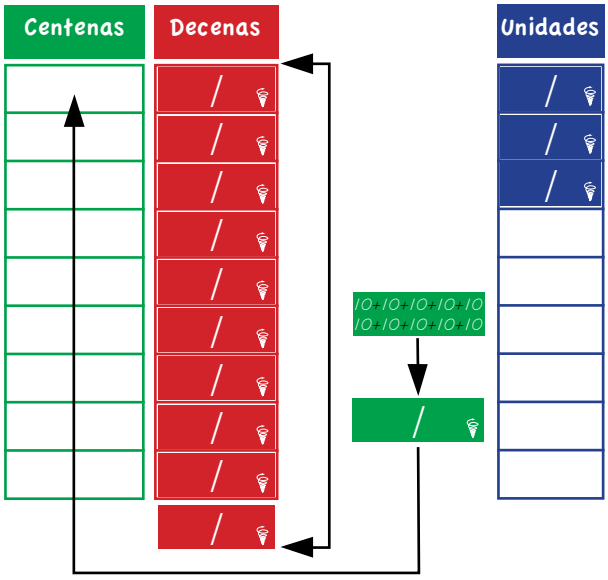
47	Cuarenta y siete	47 =	40 + 7
25		25 =	
89		89 =	
61		61 =	
74		74 =	
18		18 =	
55		55 =	
32		32 =	
68		68 =	
14		14 =	
70		70 =	
82		82 =	
38		38 =	

Dinámica Básica del Sistema de Numeración Decimal



Los Números del 0 al 999

Si en la columna de las unidades hay 9 unidades y aumentamos 1 más, formamos 1 decena y la pasamos a la columna de la izquierda.
Ahora bien, si en la columna de las decenas hay 9 decenas y aumentamos 1 más, formamos 1 centena y la pasamos a la columna de la izquierda.



Escribe los números con letra y en notación desarrollada.

194 ciento noventa y cuatro

100

104

107

115

118

126

127

131

136

141

148

194 = 100 + 90 + 4

100 =

104 =

107 =

115 =

118 =

126 =

127 =

131 =

136 =

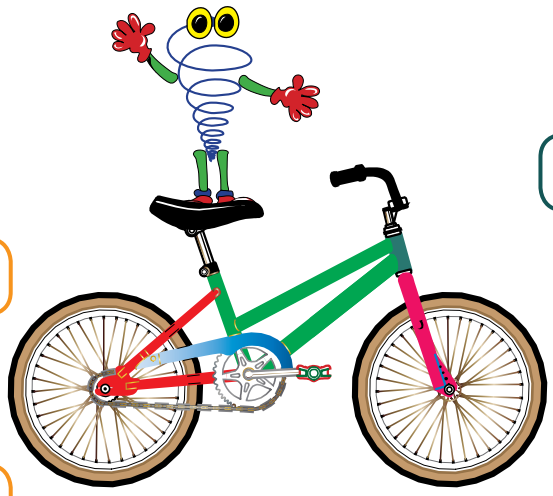
141 =

148 =

Antecesor

Sucesor

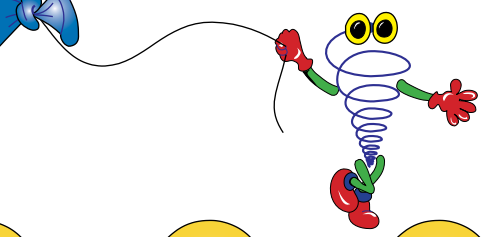
	932	
297		106
	522	
450		140
137		
	611	365
	104	
568		907
	991	
	981	260
681		274
	579	768
975		879
	560	999
620		540
	109	125
	234	400
		601
341		929
	281	328
	154	220
128		426
		642
	317	
		862
450		



Sucesor

Antecesor

Series de Números



Estudia cuidadosamente las series de números y escribe en el espacio indicado los números que faltan.

294 296

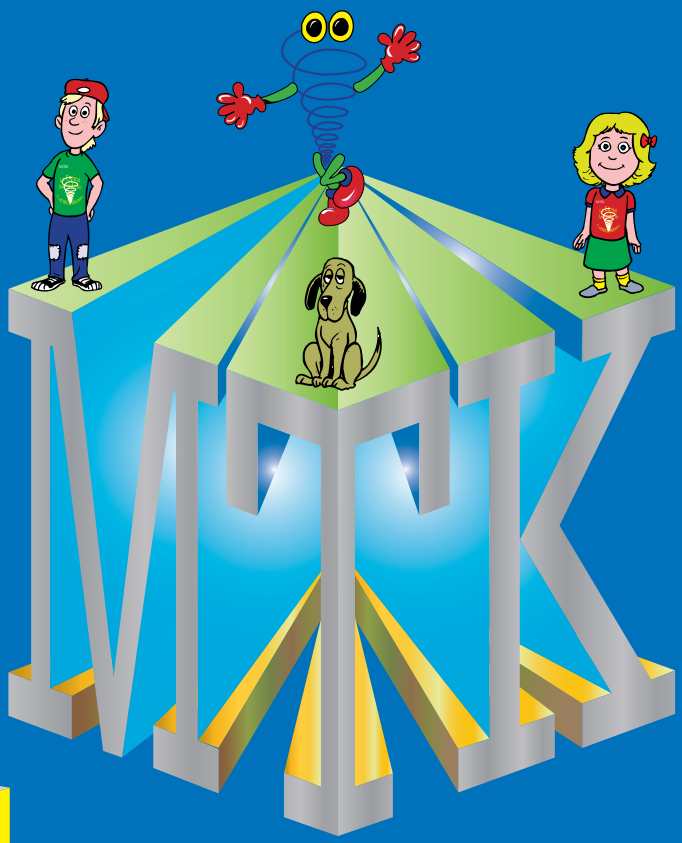
753 757

300 310

527 533

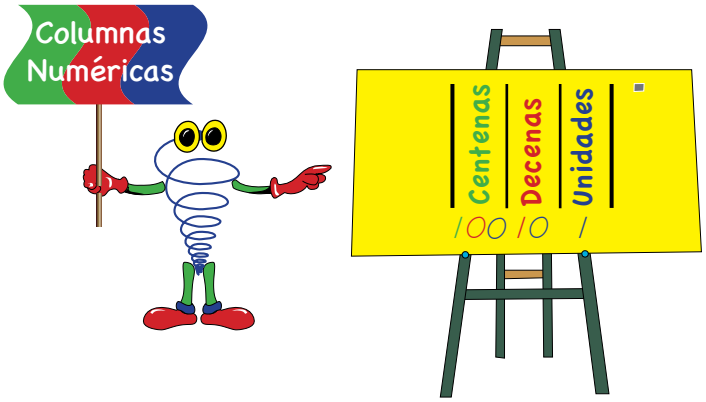
900 896

Aritmética
Tercer Año





MORENO



Columnas Numéricas

Escribir el Número en las Columnas Numéricas

Decenas Millar	Unidades Millar	Centenas	Decenas	Unidades
		100	10	1
		100	10	1
		100	10	1
			10	1
			10	1
			10	1
			10	1
			10	
			10	
Decenas de Millar	Unidades de Millar	Centenas	Decenas	Unidades

397 = 300 + 90 + 7

Trescientos noventa y siete

Números en Notación Desarrollada

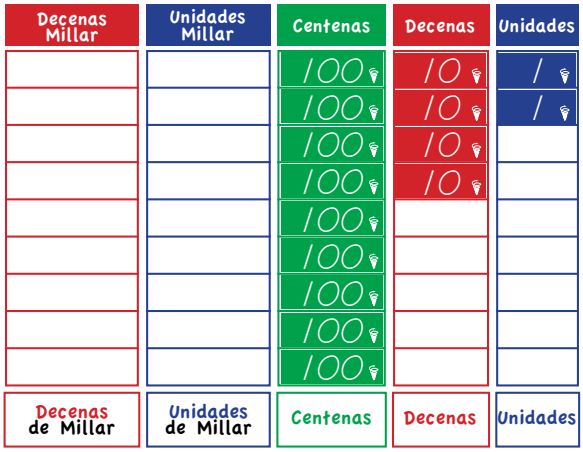
Decenas Millar	Unidades Millar	Centenas	Decenas	Unidades
		100	10	1
		100	10	1
		100	10	1
		100	10	1
		100	10	1
		100		1
				1
				1
Decenas de Millar	Unidades de Millar	Centenas	Decenas	Unidades

658 = 600 + 50 + 8

Seiscientos cincuenta y ocho

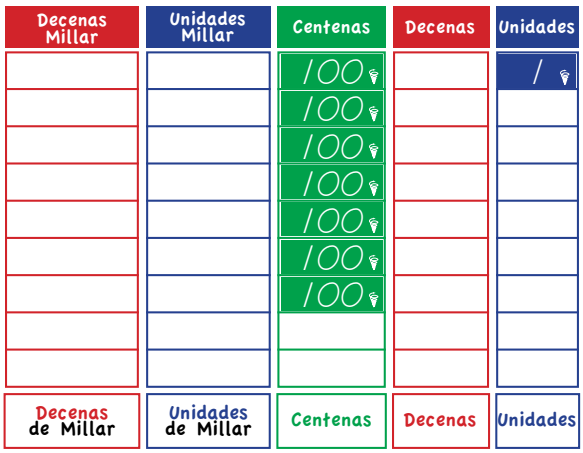
Nombres de los Números

Números en Notación Desarrollada



$942 = 900 + 40 + 2$

Novecientos cuarenta y dos



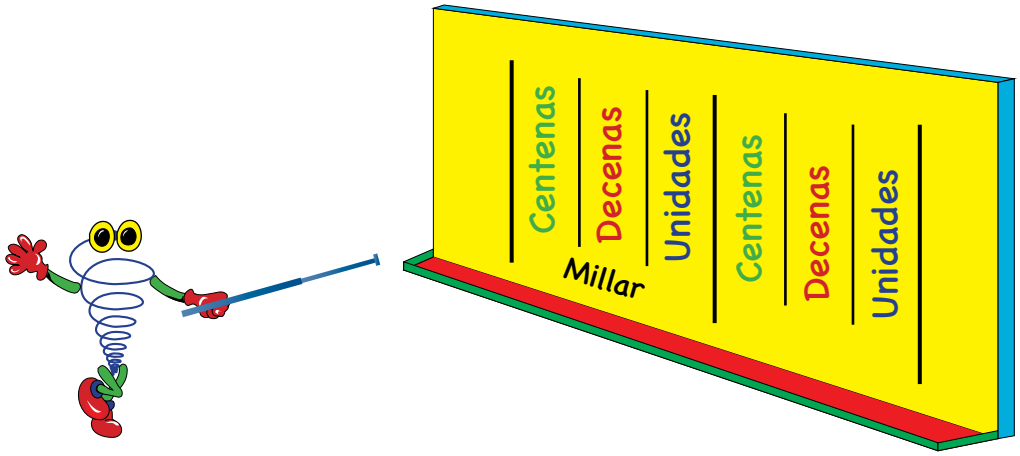
$701 = 700 + 00 + 1$

Setecientos uno

Nombres de los Números

Representa los números utilizando las columnas numéricas del material didáctico.

103	150	199	346	500	651	800	947
105	151	200	352	502	660	804	953
109	152	206	363	516	672	815	961
110	157	217	375	527	677	826	978
117	160	226	381	531	685	832	988
119	164	235	399	544	699	844	995
120	168	241	400	556	700	857	999
123	169	258	406	569	705	869	907
125	170	267	412	572	717	873	744
128	172	273	422	583	720	878	599
130	179	284	436	599	738	886	107
131	180	299	447	600	749	899	645
136	185	300	451	605	751	900	786

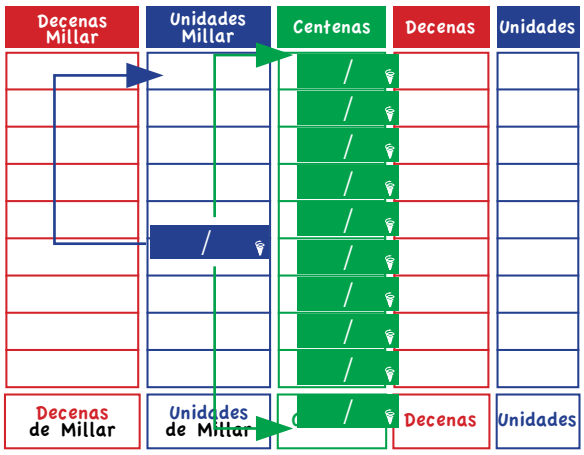


Dinámica Básica del Sistema de Numeración Decimal

Las Unidades, Decenas y Centenas de Millar

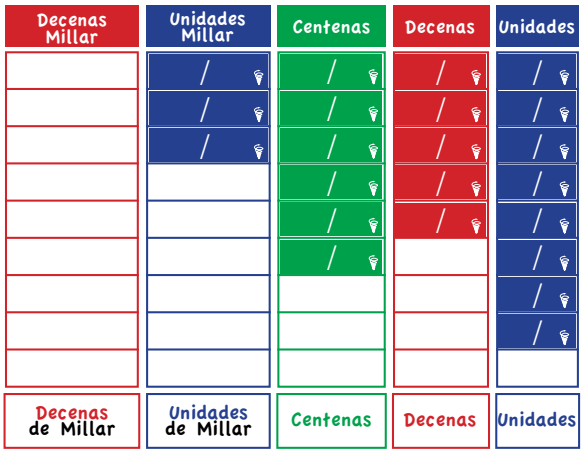
Las columnas numéricas nos permiten crear cualquier número ya que las unidades, decenas y centenas se repiten en grupos de tres, adquiriendo un nuevo apellido.

Todas las columnas numéricas, sin importar qué apellido tienen, siempre se comportan de la misma manera.
El segundo grupo de tres columnas numéricas se apellida miles o millares. El nombre completo de las columnas es: unidades de millar, decenas de millar y centenas de millar.

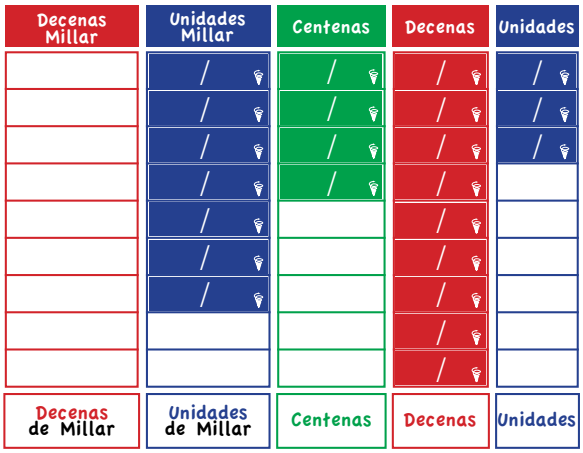


Los nombres de los números que formamos resulta ser muy fácil, ya que a los números que formamos en las columnas de millar los apellidamos mil.

Los nombres son:
Mil, dos mil, tres mil, cuatro mil, cinco mil, seis mil, siete mil, ocho mil, nueve mil.

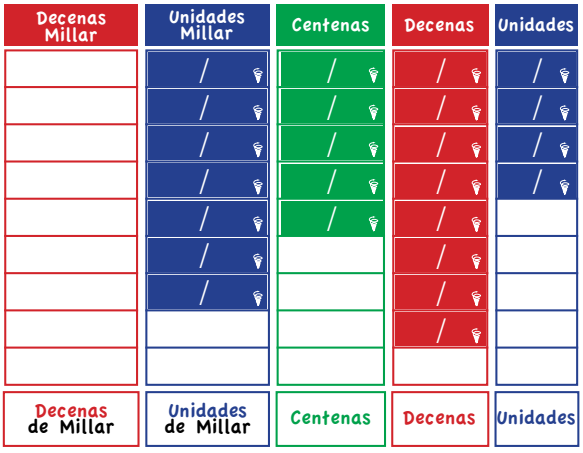


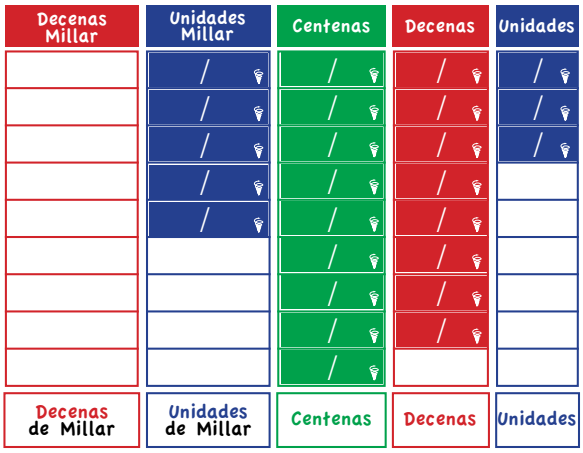


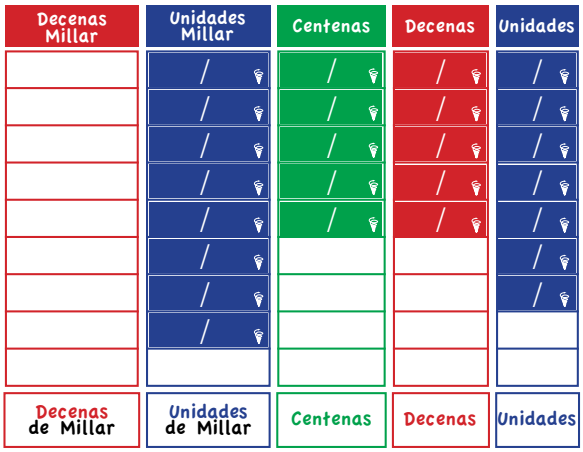


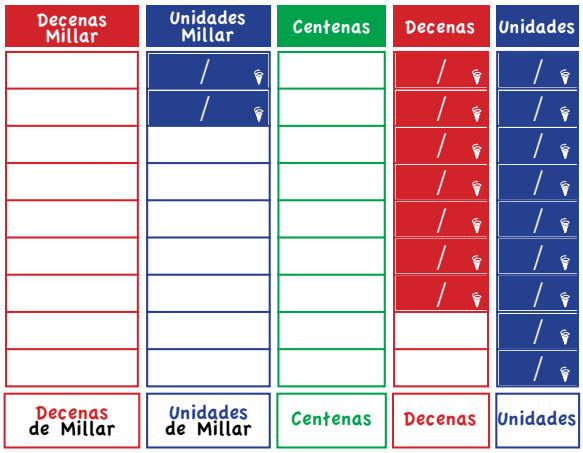


Escribe el número y su nombre.









Decenas Millar	Unidades Millar	Centenas	Decenas	Unidades
Decenas de Millar	Unidades de Millar	Centenas	Decenas	Unidades

Decenas Millar	Unidades Millar	Centenas	Decenas	Unidades
Decenas de Millar	Unidades de Millar	Centenas	Decenas	Unidades

Ejercicios Con las Columnas Numéricas



Representa los números utilizando las columnas numéricas de las cartulinas 1 y 2 del material didáctico.

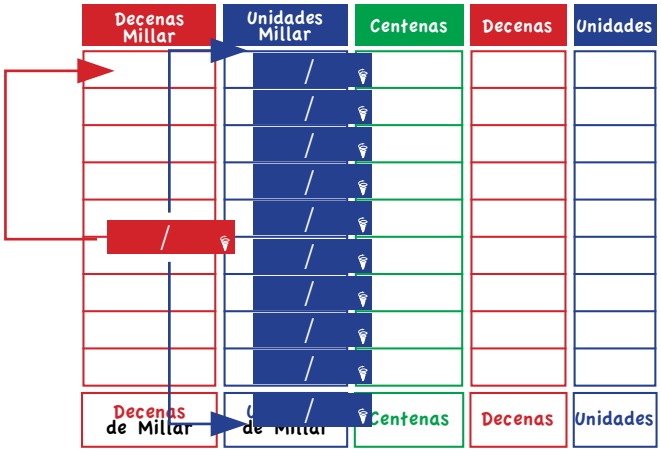
2,103	2,175	7,187	3,761	5,074	2,858	7,349
4,382	3,546	3,879	9,304	2,710	3,642	1,206
8,600	7,947	8,214	1,384	5,256	7,052	4,336
8,590	0,934	4,044	6,189	4,905	8,866	3,791
2,139	2,244	2,328	4,468	6,999	9,913	9,268
8,380	7,755	9,914	3,589	5,286	3,048	3,170

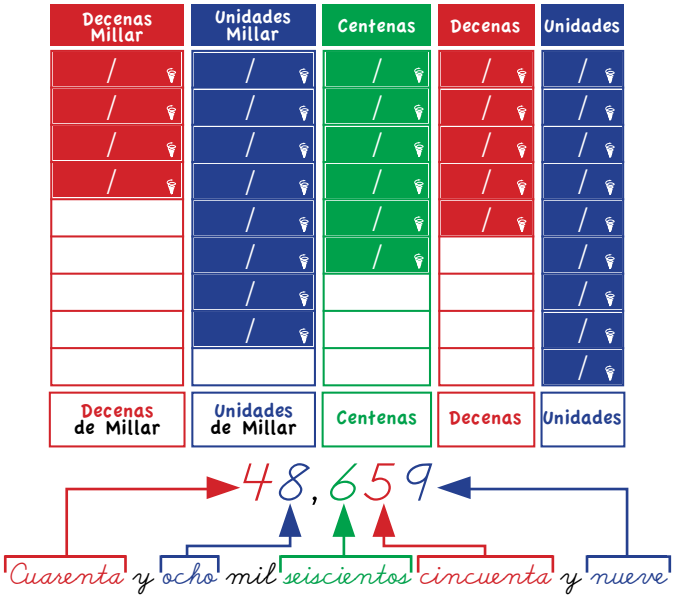
Siguiendo la dinámica básica del sistema de numeración decimal, creamos números de cinco cifras, es decir, empezamos el número en la columna de las decenas de millar o decenas de mil.

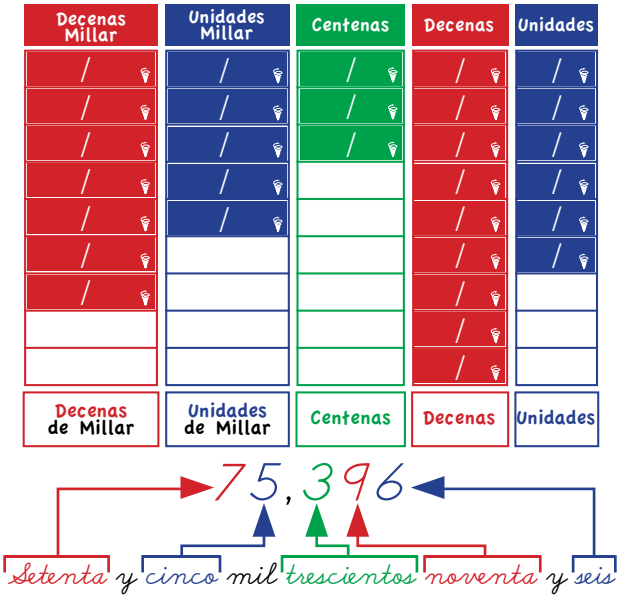
A los números que formamos en las columnas de millar los apellidamos mil.

Por ejemplo:

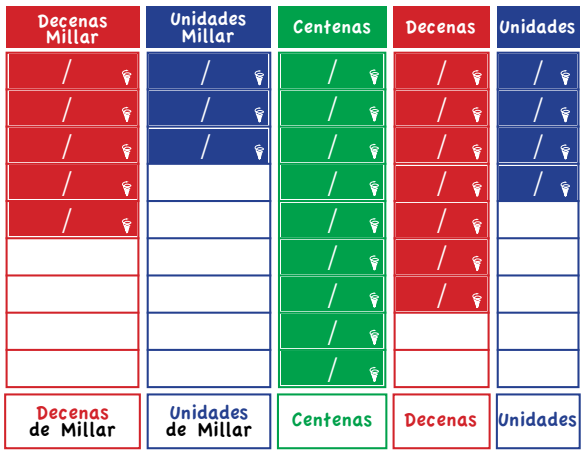
Treinta y cinco mil.
Ochenta y nueve mil.
Setenta y seis mil.

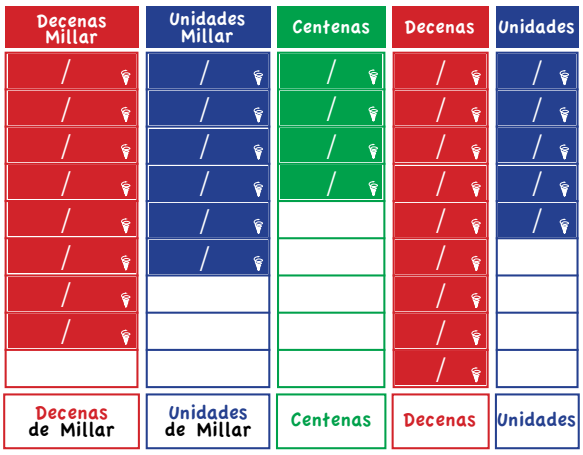






Escribe el número y su nombre.







Sumar Números Hasta 18 en las Columnas Numéricas

Representa los números utilizando las columnas numéricas de las cartulinas 1 y 2 del material didáctico.

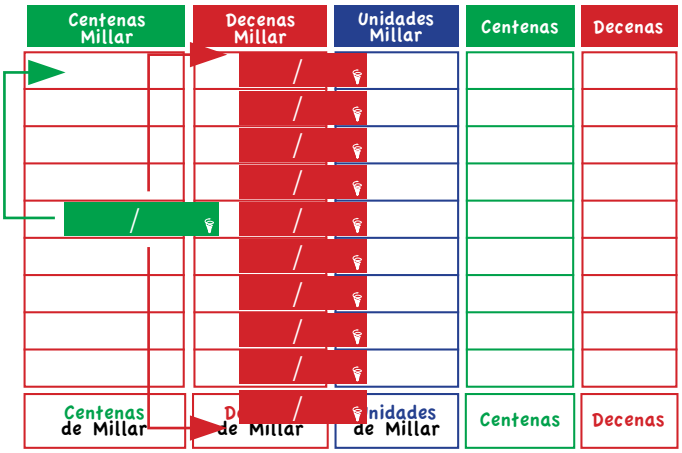
42,103	2,175	47,187	13,761	65,074	12,858	7,349
14,382	3,546	33,879	29,304	92,710	33,642	51,206
88,600	7,947	68,214	91,384	85,256	67,052	74,336
38,590	90,934	74,044	56,189	14,905	68,866	53,791
82,139	22,244	82,328	94,468	26,999	9,913	39,268
58,380	10,755	49,914	70,589	35,286	33,048	13,170
19,911	61,761	96,572	60,247	95,890	36,145	76,453
79,216	67,427	91,903	65,602	7,947	20,292	87,128
2,298	18,861	77,746	79,665	23,964	87,832	3,426
16,508	39,287	42,085	31,200	99,631	40,885	84,128
4,110	9,719	13,432	66,479	47,650	3,725	8,887
66,267	72,093	96,644	48,949	88,592	15,400	94,742
97,319	51,132	35,210	95,443	18,900	38,166	19,837
9,256	99,685	34,038	20,100	24,317	63,346	89,271
95,811	42,177	49,059	46,093	13,633	47,492	76,554
46,281	37,670	35,469	36,063	72,166	60,873	91,629
5,874	76,821	71,893	65,277	6,293	72,739	83,966
90,649	78,015	89,752	43,446	23,027	18,893	59,251

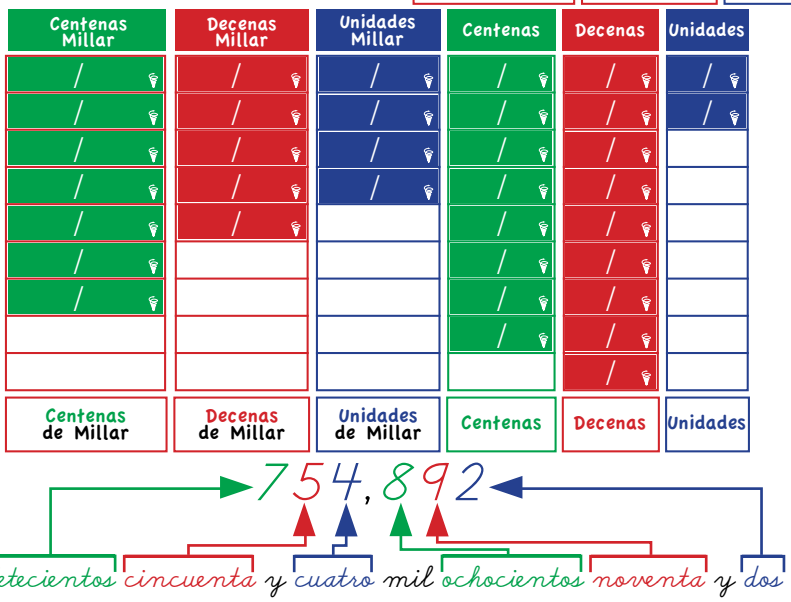
Añadiendo una columna más a la izquierda de la columna de las decenas de millar, creamos las centenas de millar o centenas de mil.

Los números que creamos en esta columna, también los apellidamos mil.

Por ejemplo:

Novecientos cuarenta y seis mil.





Escribe con ortografía correcta los nombres de los números.

194,498 _____

575,133 _____

797,077 _____

215,786 _____

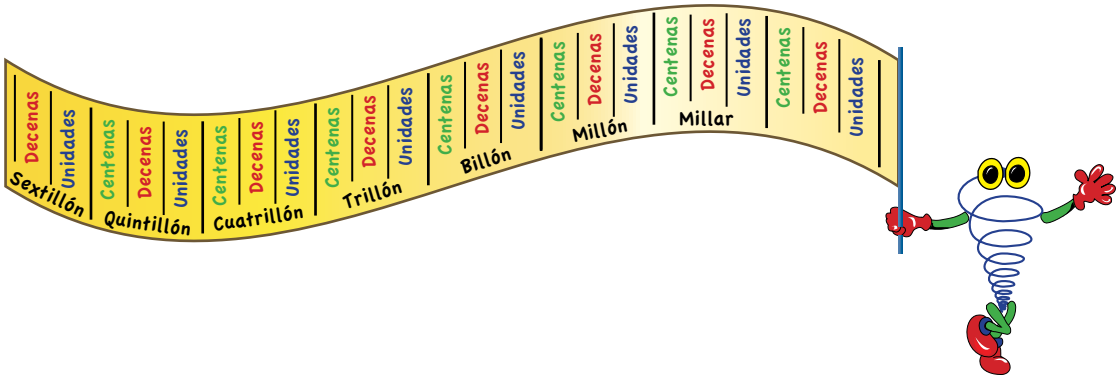
893,690 _____

699,058 _____

971,399 _____

356,083 _____

833,327 _____

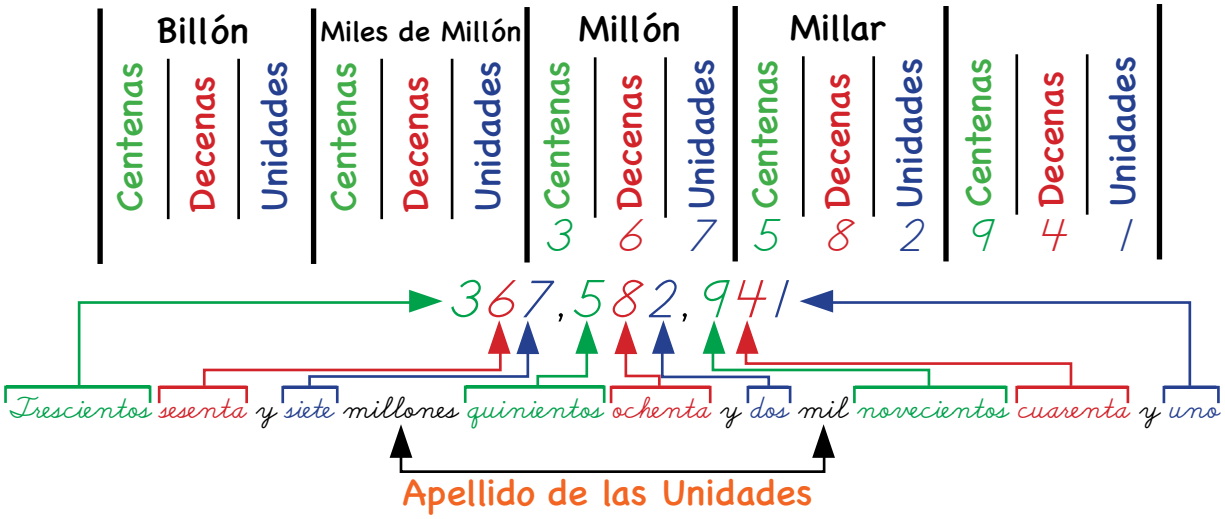


La Cantidad de Números que Podemos Crear es Infinita

Infinito significa que nunca lo alcanzamos. Decimos que la dinámica básica del sistema de numeración decimal nos permite crear una cantidad infinita de números, porque nunca terminamos, siempre podemos crear un número más.

Para crear el universo numérico necesitamos solamente dos elementos:

1. Los nueve dígitos y el cero.
   1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.
2. Las columnas numéricas.
   Unidades, decenas, centenas.



Para escribir números en notación desarrollada, indicamos en qué columna se encuentra el dígito.

Escribir en notación desarrollada los números.

7,892 = 7,000 + 800 + 90 + 2
361,085 = 300,000 + 60,000 + 1,000 + 000 + 85 + 5
85,293,746 = 80,000,000 + 5,000,000 + 200,000 + 90,000 + 3,000 + 700 + 40 + 6

Expresa los números en notación desarrollada.

912,608

437,129

4,431

78,092

689,428

6,800,892

2,403,199

63,368

106,158

628,474

7,281

3,781,108

5,522,087

60,281

113,764

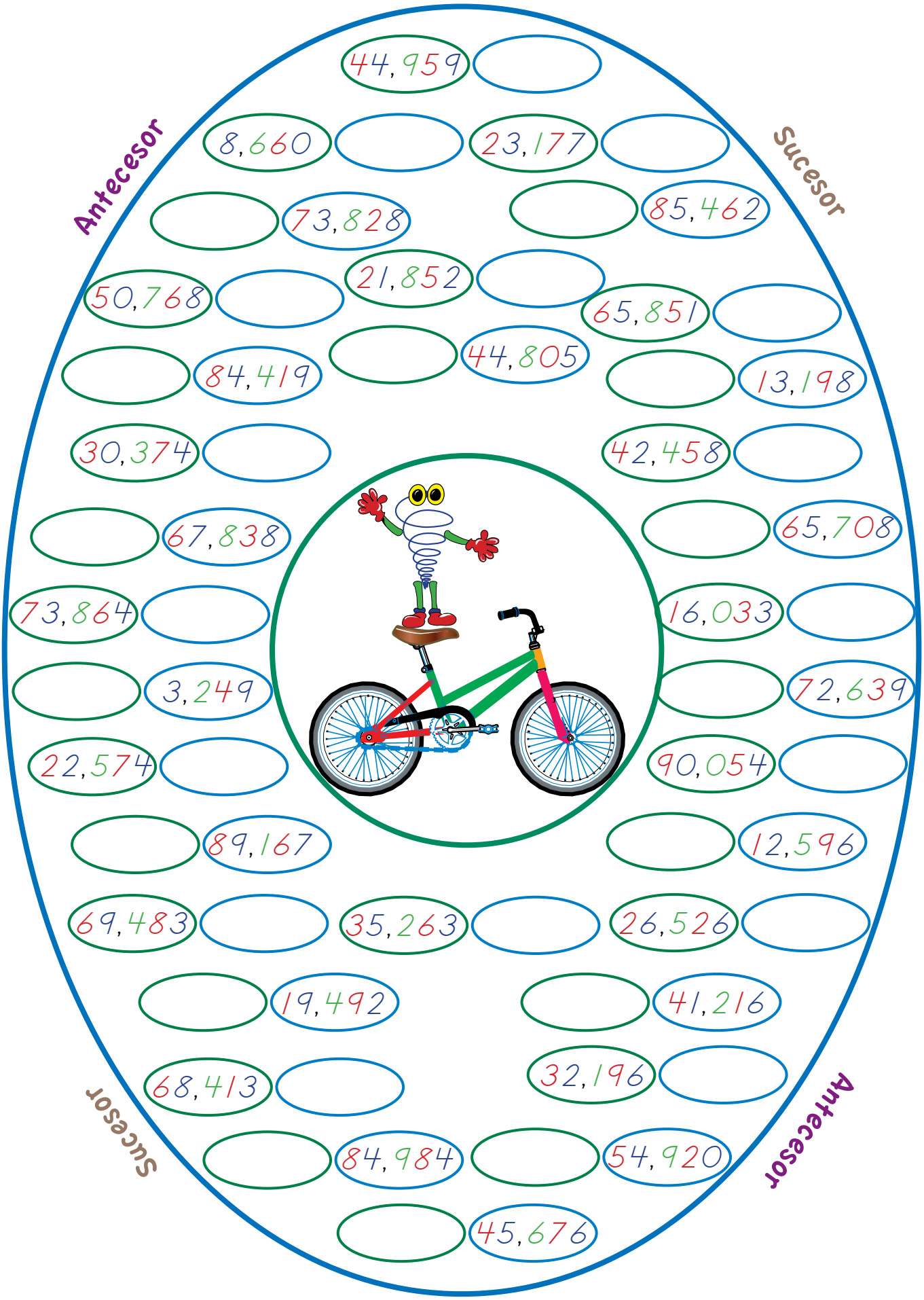
663,781

75,393

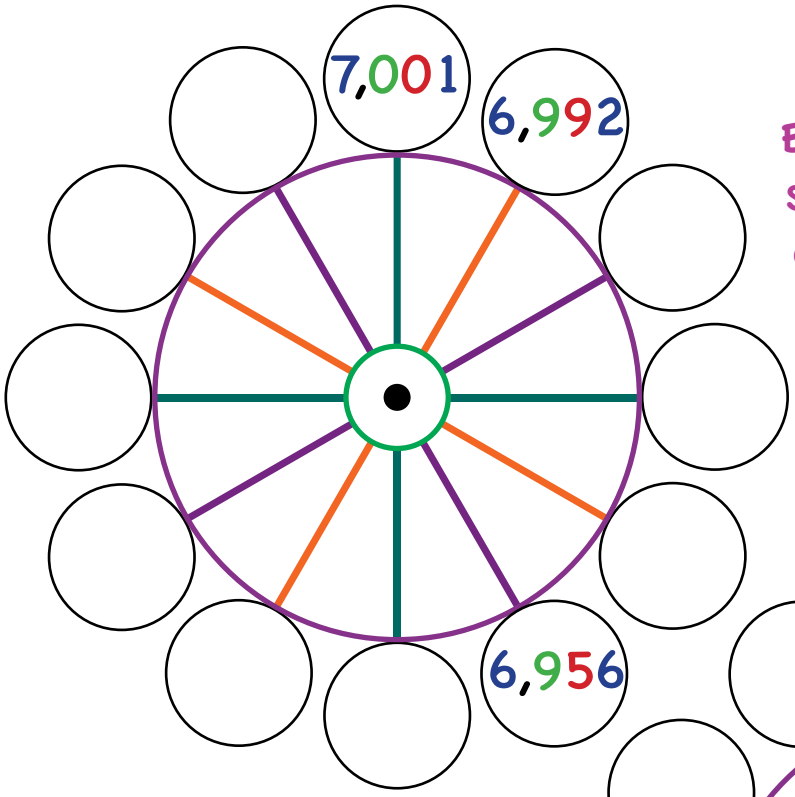
2,308,240

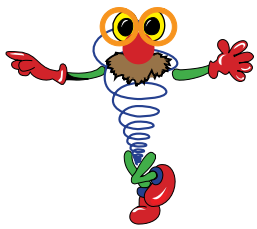
8,726,515

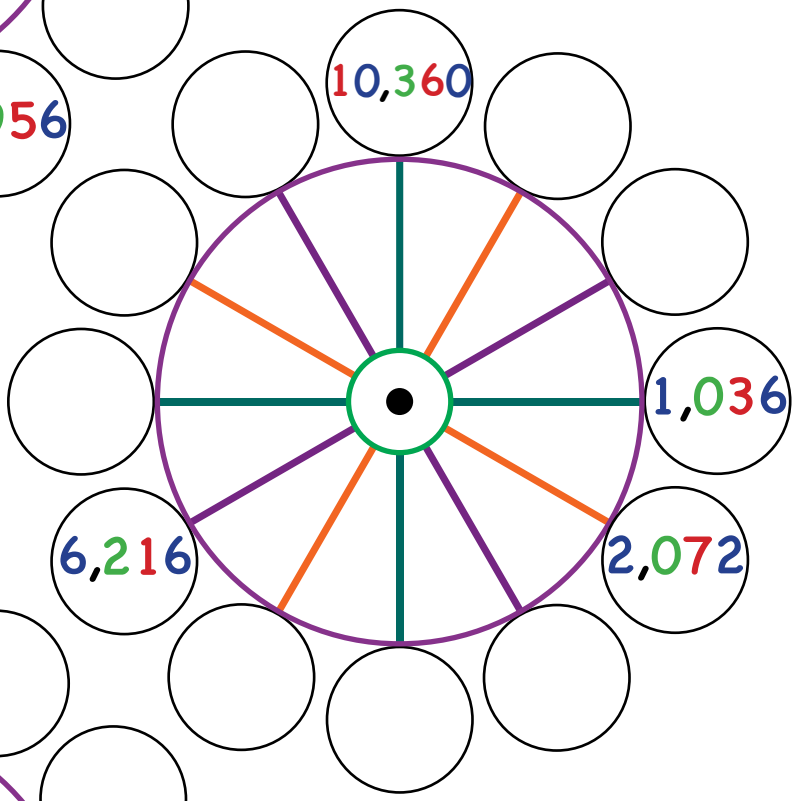
9,435,726

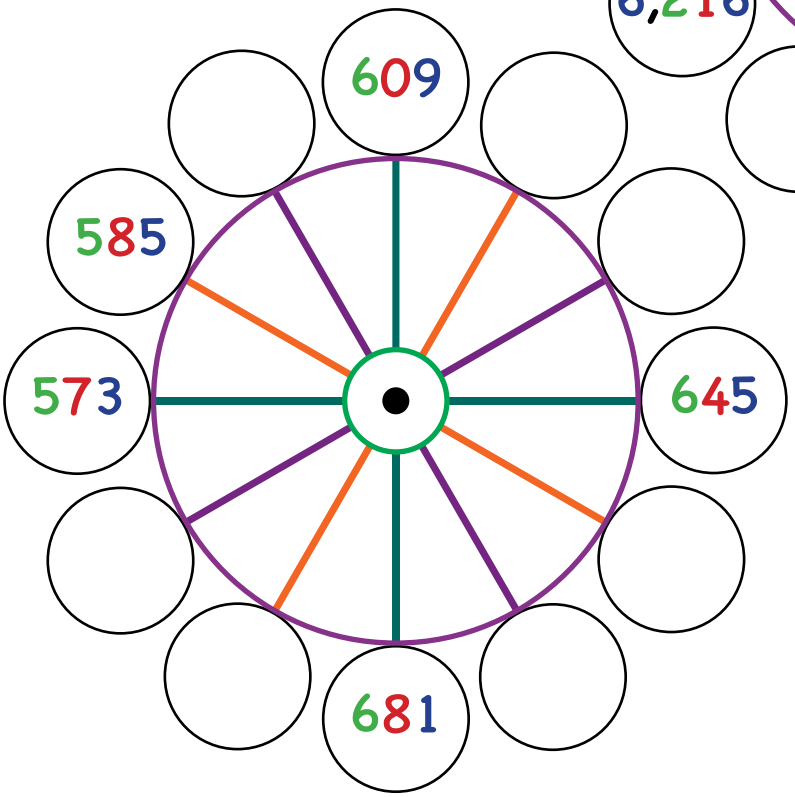

Antecesor
Sucesor
44,959
8,660
23,177
73,828
85,462
21,852
50,768
65,851
44,805
84,419
13,198
30,374
42,458
67,838
65,708
73,864
16,033
3,249
72,639
22,574
90,054
89,167
12,596
69,483
35,263
26,526
19,492
41,216
68,413
32,196
Sucesor
Antecesor
84,984
54,920
45,676

Estudia cuidadosamente las series de números. Escribe en el espacio indicado los números que faltan.









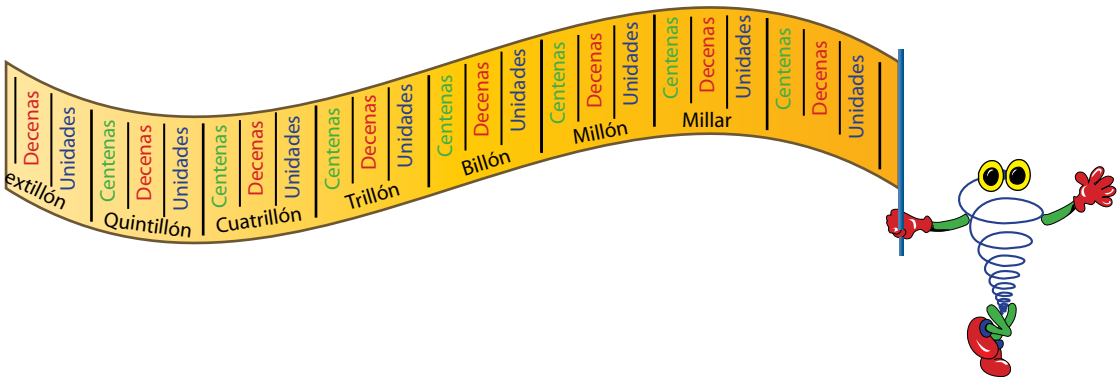
Aritmética

Cuarto Año





MORENO



Dinámica Básica del Sistema de Numeración Decimal

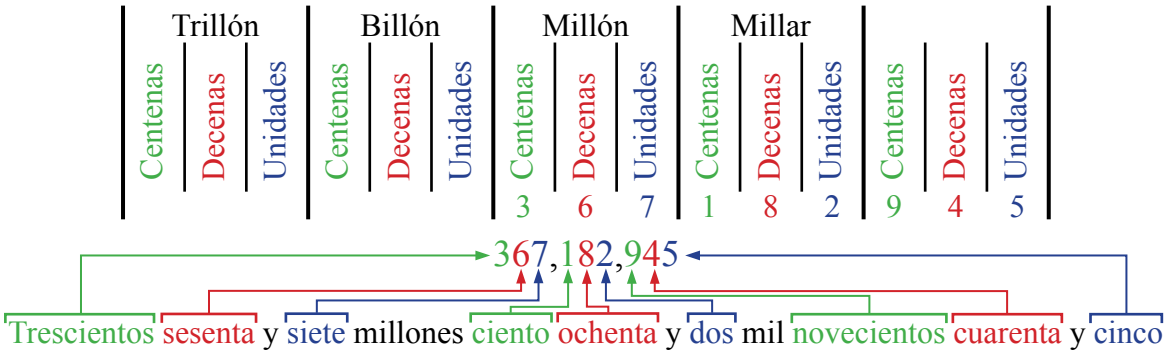
La cantidad de números que podemos crear es infinita

Infinito significa que nunca lo alcanzamos. Decimos que la dinámica básica del sistema de numeración decimal nos permite crear una cantidad infinita de números, porque nunca terminamos, siempre podemos crear un número más.

Para crear el universo numérico necesitamos solamente dos elementos.

1. Los nueve dígitos y el cero. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.
2. Las columnas numéricas. Unidades, decenas, centenas.

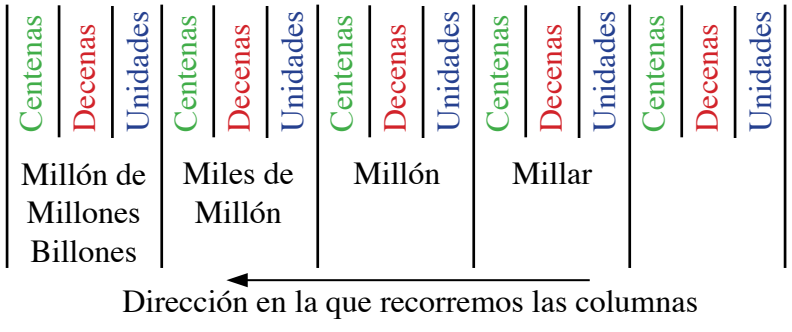
Los apellidos de las columnas numéricas son: Millar, millón, billón, trillón, cuatrillón, quintillón, etcétera.



Las columnas numéricas

Los números naturales o enteros, los construimos colocando los nueve dígitos y el cero, en las columnas numéricas.

Las columnas numéricas las recorremos de derecha a izquierda y sus nombres siguen un esquema cíclico, es decir, que se repiten cada tres columnas y las palabras clave que se repiten son: unidades, decenas y centenas.



Ejemplo

Escribir el número 75,396 en las columnas numéricas.







Setenta y cinco mil trescientos noventa y seis

Para escribir números en notación desarrollada, indicamos en qué columna se encuentra el dígito.

Expresar los números en notación desarrollada nos ayuda a entender mejor cómo escribir los nombres de los números.

Millar							
Centenas	Decenas	Unidades		Centenas	Decenas	Unidades	
7	0	0	,	0	0	0	Setecientos mil
	2	0	,	0	0	0	Veinte mil
		5	,	0	0	0	Cinco mil
				8	0	0	Ochocientos
					4	0	Cuarenta
						3	Tres

725,843 = 700,000 + 20,000 + 5,000 + 800 + 40 + 3

Setecientos veinticinco mil ochocientos cuarenta y tres

Ejemplo

Escribir en notación desarrollada los números.

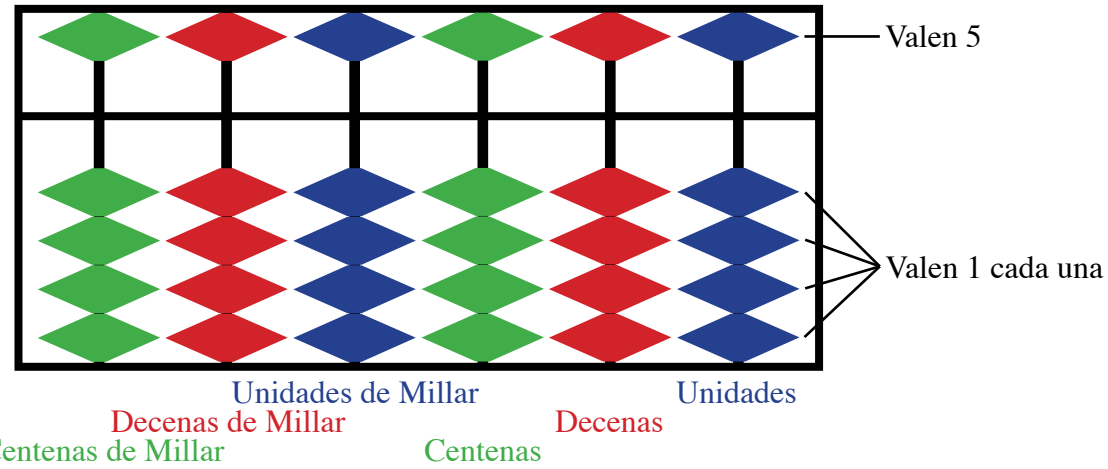
924 = 900 + 20 + 4
2,648 = 2,000 + 600 + 40 + 8
32,648 = 30,000 + 2,000 + 600 + 40 + 8
725,106 = 700,000 + 20,000 + 5,000 + 100 + 00 + 6
1, 684,293 = 1,000,000 + 600,000 + 80,000 + 4,000 + 200 + 90 + 3
85, 293,746 = 80,000,000 + 5,000,000 + 200,000 + 90,000 + 3,000 + 700 + 40 + 6

Ábaco Tipo Japonés

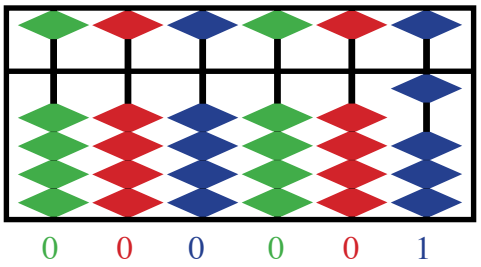
Escribir números en el ábaco

El ábaco es un instrumento para realizar operaciones aritméticas, utilizando las columnas numéricas. Su origen se encuentra muy probablemente en Babilonia. Existen varios tipos de ábacos. Algunos de ellos son: el ábaco chino que data de 500 años antes de Cristo, el ábaco japonés que evolucionó del chino y se le considera su origen en el siglo XV, el ábaco azteca del siglo IX o X. Nosotros utilizaremos el ábaco tipo japonés.

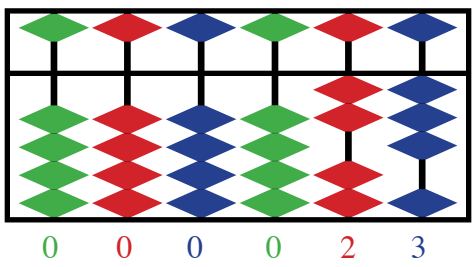
El ábaco tipo japonés, contiene columnas que representan las columnas numéricas. En cada columna numérica del ábaco, subiendo y bajando las cuentas, escribimos los dígitos del uno al nueve y el cero. Cada columna tiene cinco cuentas, una vale cinco unidades y las otras cuatro una unidad cada una.



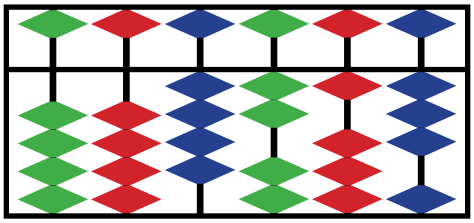
En una columna representamos cero unidades, cuando las cuentas están en la posición que se muestra en la figura anterior. Las cuentas que valen cinco están arriba y todas las cuentas que valen uno están abajo.
Para escribir el uno en la columna de las unidades, subimos una cuenta de la parte inferior en esa columna.



Para escribir veintitrés, subimos dos cuentas en la columna de las decenas y tres en la columna de las unidades.

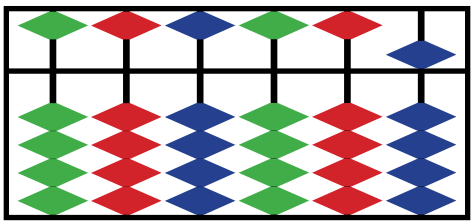


Utilizando las columnas de las unidades de millar, las centenas, decenas y unidades, escribimos el número 4,213.



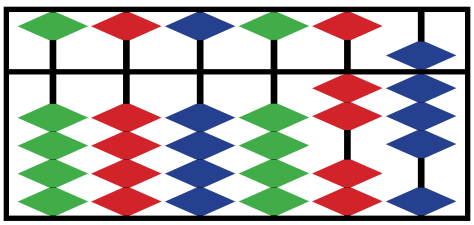
0 0 4 2 1 3

Las fichas de la fila de arriba valen 5 unidades cada una. Escribir el número 5, significa bajar la ficha de arriba en la columna de las unidades.



0 0 0 0 0 5

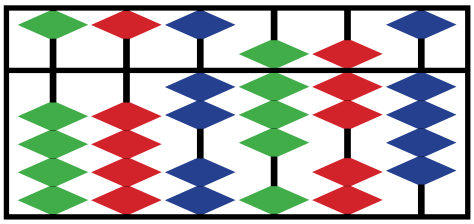
Para escribir el número 28, en la columna de las decenas, subimos 2 fichas de la parte inferior, y en la columna de las unidades, bajamos la ficha de la parte superior que representa 5 unidades y subimos 3 fichas de la parte inferior que representan 3 unidades cada una.

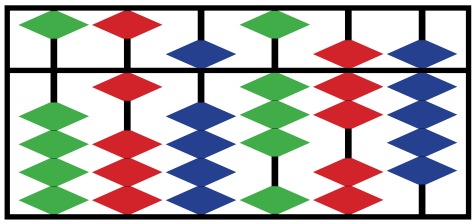


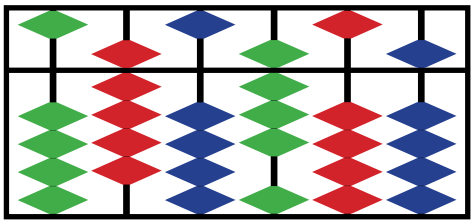
0 0 0 0 2 8

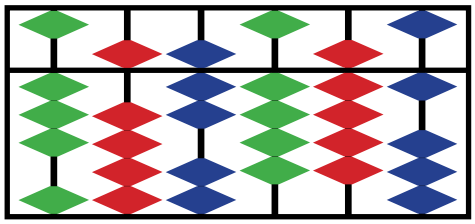
Serie de Ejercicios 3

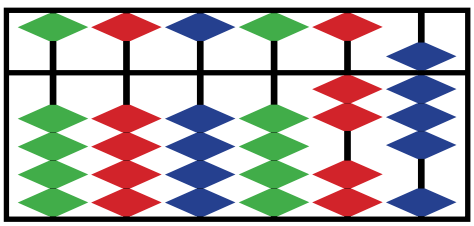
Escribe el valor representado en el ábaco. Utilizando el ábaco del material didáctico, representa las cantidades.

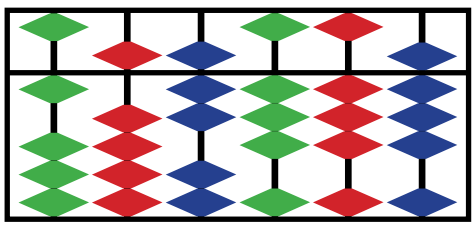












Propiedades de los Números Naturales

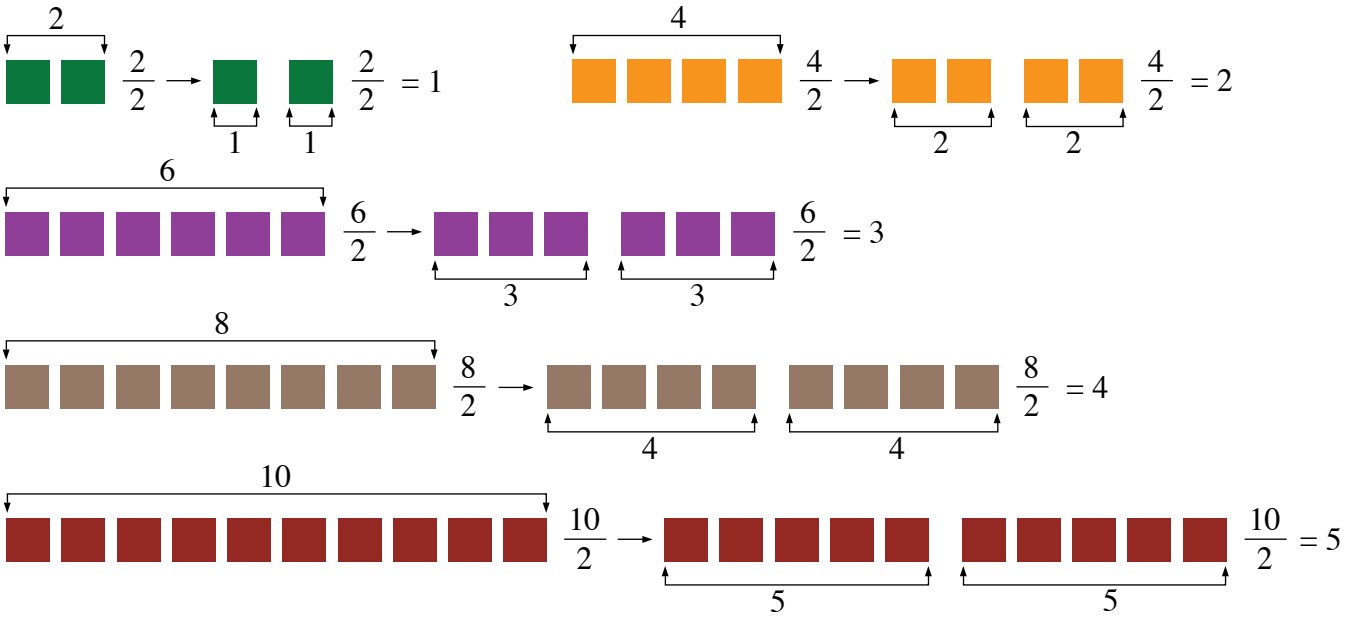
Números pares

Todos los números que pueden dividirse en forma exacta entre 2, se llaman pares.

16 es par porque $\frac{16}{2} = 8$ 74 es par porque $\frac{74}{2} = 37$ 128 es par porque $\frac{128}{2} = 64$

Para construir todos los números, contamos con nueve dígitos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y el 0. Los dígitos 2, 4, 6, 8 y el número 10 son pares. Vamos a demostrarlo dividiéndolos entre 2. Para hacerlo usamos el concepto de división.

Los números naturales representan objetos. Dividir un número entre dos, consiste en separar en dos conjuntos los objetos representados por el número. El resultado de la división es el número de objetos que los conjuntos tienen.



Al dividir un número par entre 2, formamos dos conjuntos que tienen el mismo número de objetos y no sobra ninguno. Por eso, decimos que la división es exacta.

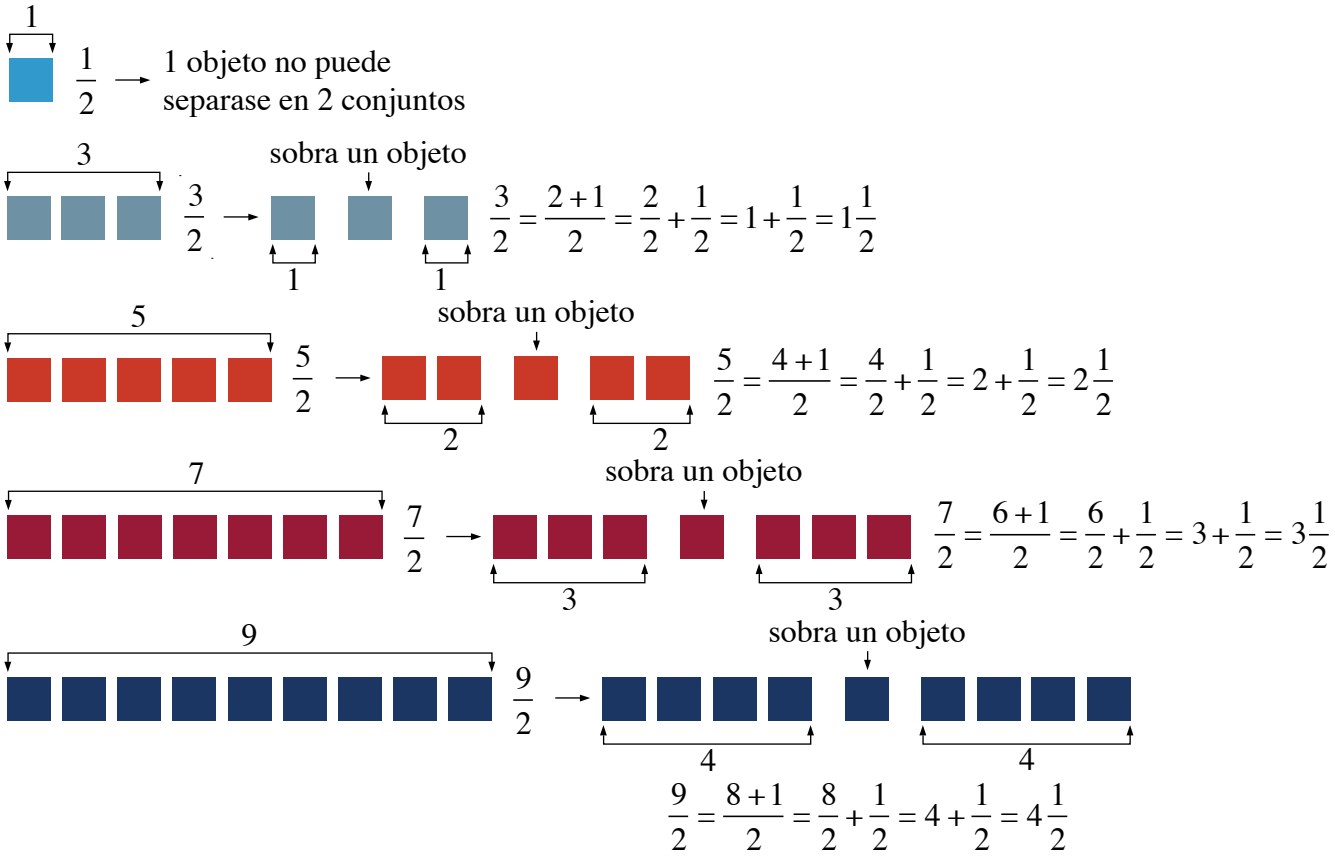
Números impares

Todos los números que no pueden dividirse en forma exacta entre dos, se llaman impares.

19 es impar porque $\frac{19}{2}=\frac{18+1}{2}=\frac{18}{2}+\frac{1}{2}=9+\frac{1}{2}=9\frac{1}{2}$

125 es impar porque $\frac{125}{2}=\frac{124+1}{2}=\frac{124}{2}+\frac{1}{2}=62+\frac{1}{2}=62\frac{1}{2}$

Los dígitos 1, 3, 5, 7 y 9 son impares. Los vamos a dividir entre 2, para demostrar que su división no es exacta, ya que al separarlos en dos conjuntos iguales, sobra un objeto.



$\frac{3}{2}=\frac{2+1}{2}=\frac{2}{2}+\frac{1}{2}=1+\frac{1}{2}=1\frac{1}{2}$

$\frac{5}{2}=\frac{4+1}{2}=\frac{4}{2}+\frac{1}{2}=2+\frac{1}{2}=2\frac{1}{2}$

$\frac{7}{2}=\frac{6+1}{2}=\frac{6}{2}+\frac{1}{2}=3+\frac{1}{2}=3\frac{1}{2}$

$\frac{9}{2}=\frac{8+1}{2}=\frac{8}{2}+\frac{1}{2}=4+\frac{1}{2}=4\frac{1}{2}$

Ejercicio

Dividiendo 247 y 531 entre 2, demuestra que son números impares.

Ejercicio

Dividiendo 538 y 374 entre 2, demuestra que son números pares.

Tabla de números pares e impares

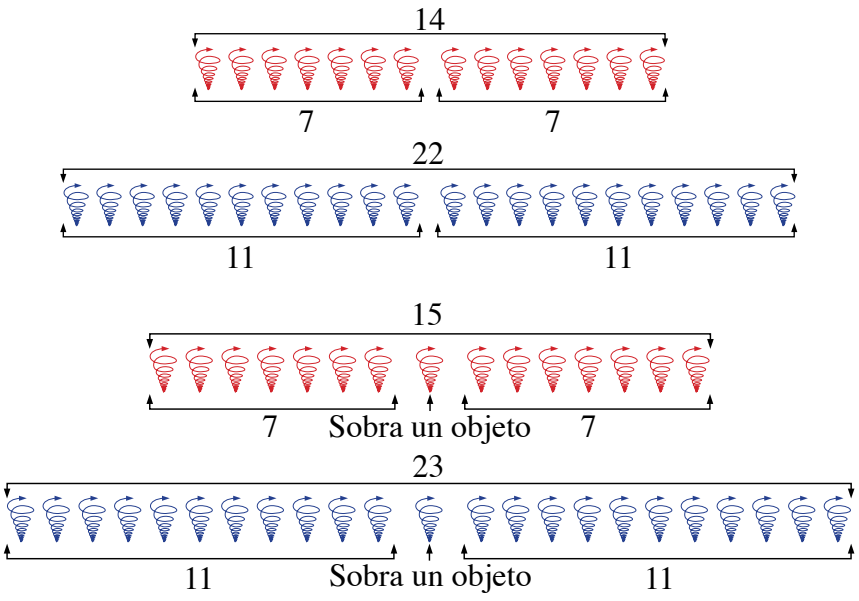
De la misma forma que lo hicimos para los nueve dígitos y el cero, podemos verificar que todos los números naturales que terminan en 2, 4, 6, 8 y 0 son pares, y todos los que terminan en 1, 3, 5, 7 y 9 son impares.

Impar	Par	Impar	Par	Impar	Par	Impar	Par	Impar	Par
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
....	....	....	....	....	....	....	....	....	....

Propiedades de los números pares e impares

1. Cualquier número par puede separarse en dos conjuntos iguales de objetos y no sobra ningún objeto.
   Esta propiedad ya la demostramos, al verificar que 2, 4, 6, 8 y 10 son números pares.

2. Cualquier número impar, al separarse en dos conjuntos iguales de objetos, siempre sobra un objeto.
   Esta propiedad también ya la demostramos, al verificar que 1, 3, 5, 7 y 9 son números impares.



Propiedades de la suma, resta y multiplicación de números pares e impares

Suma	Resta	Multiplicación
Par + Par = Par	Par – Par = Par	Par × Par = Par
Impar + Impar = Par	Impar – Impar = Par	Impar × Impar = Impar
Par + Impar = Impar	Par – Impar = Impar	Par × Impar = Par
Impar + Par = Impar	Impar – Par = Impar	Impar × Par = Par

Ejemplos

1. Cuando sumamos dos números pares, el resultado siempre es un número par.

   5 + 9 = 14 — 265 + 73 = 338 — 1,255 + 641 = 1,896
   27 + 61 = 88 — 99 + 647 = 746 — 827 + 3,623 = 4,450

2. Cuando sumamos dos números impares, el resultado siempre es un número par.

   5 + 9 = 14 — 265 + 73 = 338 — 1,255 + 641 = 1,896
   27 + 61 = 88 — 99 + 647 = 746 — 827 + 3,623 = 4,450

3. Cuando sumamos un número par y un número impar, o un número impar y un número par, el resultado siempre es un número impar.

   4 + 7 = 11 — 681 + 58 = 739 — 7,236 + 265 = 7,501
   65 + 22 = 87 — 80 + 367 = 447 — 443 + 5,738 = 6,181

4. Cuando restamos dos números pares, el resultado siempre es un número par.

   18 – 4 = 14 — 620 – 84 = 536 — 2,528 – 740 = 1,788
   42 – 26 = 16 — 322 – 56 = 266 — 4,576 – 932 = 3,644

5. Cuando restamos dos números impares, el resultado siempre es un número par.

   17 – 5 = 12 — 721 – 77 = 644 — 4,263 – 689 = 3,574
   51 – 23 = 28 — 479 – 65 = 414 — 3,765 – 823 = 2,942

6. Cuando restamos un número par y un número impar, o un número impar y un número par, el resultado siempre es un número impar.

   26 – 7 = 19 — 271 – 84 = 187 — 2,512 – 869 = 1,643
   53 – 32 = 21 — 790 – 57 = 733 — 3,721 – 232 = 3,489

7. Cuando multiplicamos dos números pares, el resultado siempre es un número par.

   2 × 8 = 16 — 20 × 12 = 240 — 110 × 20 = 2,200
   14 × 4 = 56 — 14 × 16 = 224 — 36 × 208 = 7,488

8. Cuando multiplicamos dos números impares, el resultado siempre es un número impar.

   5 × 9 = 45 — 29 × 7 = 203 — 33 × 41 = 1,353
   21 × 3 = 63 — 9 × 85 = 765 — 57 × 69 = 3,933

9. Cuando multiplicamos un número par y un número impar, o un número impar y un número par, el resultado siempre es un número par.

   4 × 7 = 28 — 9 × 38 = 342 — 50 × 49 = 2,450
   3 × 16 = 48 — 72 × 5 = 360 — 61 × 82 = 5,002

Ejercicio

Dibujando círculos pequeños, demuestra que 16 es un número par, ya que puede dividirse en dos conjuntos con el mismo número de círculos y no sobra ningún círculo.

Ejercicio

Dibujando triángulos pequeños, demuestra que 13 es un número impar, ya que al separar los triángulos en dos conjuntos con el mismo número de triángulos, sobra un triángulo.

Ejercicio

Escoge dos números pares cualquiera que se encuentren entre 1,001 y 2,125. Demuestra que al sumarlos, el resultado también es un número par. Repite el ejercicio tres veces.

Ejercicio

Escoge dos números impares cualquiera que se encuentren entre 228 y 834. Demuestra que al sumarlos, el resultado es un número par. Repite el ejercicio tres veces.

Ejercicio

Escoge un número par y un número impar cualquiera que se encuentren entre 205 y 748. Demuestra que al sumarlos, el resultado es un número impar. Repite el ejercicio tres veces.

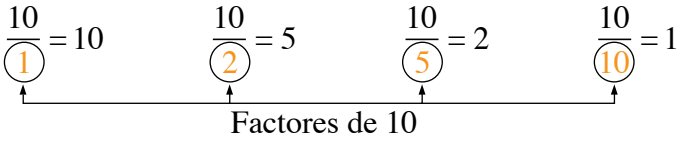
Los factores de un número natural

Los factores de un número natural, son todos los números naturales que lo dividen en forma exacta.

Ejemplo

Encontrar todos los factores de 10.

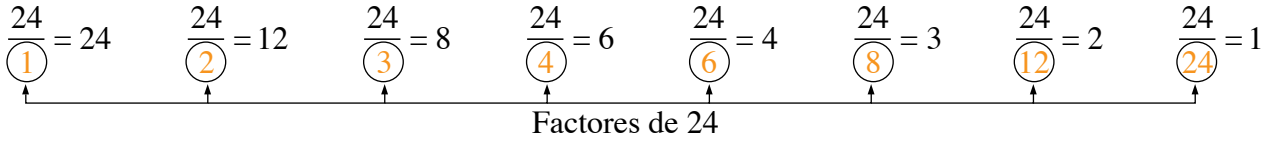
Los números naturales que dividen a 10 en forma exacta son: 1, 2, 5 y 10.



Ejemplo

Encontrar todos los factores de 24.

Los números naturales que dividen a 24 en forma exacta son: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 y 24.



Serie de Ejercicios 4

Encuentra todos los factores primos de los números.

Número	Factores
14	
36	
50	
60	

Número	Factores
63	
84	
99	
120	

Los múltiplos de un número

Los múltiplos de un número, se forman multiplicando el número por otros números naturales.

Ejemplo

Obtener los primeros doce múltiplos de 5, 9 y 12.

$5 \times 1 = 5$	$9 \times 1 = 9$	$12 \times 1 = 12$
$5 \times 2 = 10$	$9 \times 2 = 18$	$12 \times 2 = 24$
$5 \times 3 = 15$	$9 \times 3 = 27$	$12 \times 3 = 36$
$5 \times 4 = 20$	$9 \times 4 = 36$	$12 \times 4 = 48$
$5 \times 5 = 25$	$9 \times 5 = 45$	$12 \times 5 = 60$
$5 \times 6 = 30$	$9 \times 6 = 54$	$12 \times 6 = 72$
$5 \times 7 = 35$	$9 \times 7 = 63$	$12 \times 7 = 84$
$5 \times 8 = 40$	$9 \times 8 = 72$	$12 \times 8 = 96$
$5 \times 9 = 45$	$9 \times 9 = 81$	$12 \times 9 = 108$
$5 \times 10 = 50$	$9 \times 10 = 90$	$12 \times 10 = 120$
$5 \times 11 = 55$	$9 \times 11 = 99$	$12 \times 11 = 132$
$5 \times 12 = 60$	$9 \times 12 = 108$	$12 \times 12 = 144$
Múltiplos de 5	Múltiplos de 9	Múltiplos de 12

Ejercicio

Encuentra los primeros seis múltiplos de 8.

Ejercicio

Encuentra los primeros diez múltiplos de 11.

Ejercicio

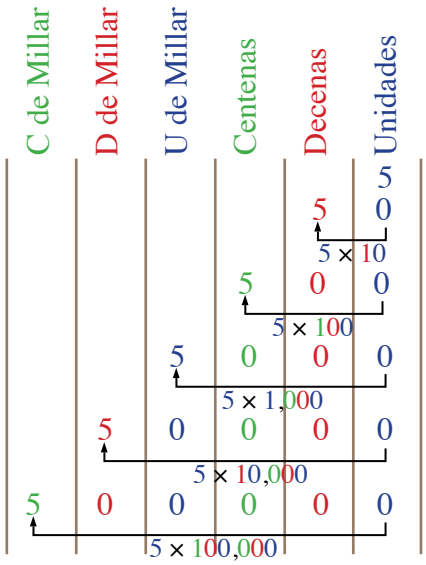
Encuentra los primeros doce múltiplos de 10.

Multiplicar un número por 10

Una de las propiedades más importantes de la dinámica básica del sistema de numeración decimal, es que al pasar de una columna numérica a la que se encuentra a su izquierda, es equivalente a multiplicar por 10.

Multiplicar un número por 10, 100, 1,000, 10,000, 100,000, etcétera, es equivalente a aumentar ceros al número.

$5 \times 1 = 5$
$5 \times 10 = 50$
$5 \times 100 = 500$
$5 \times 1{,}000 = 5{,}000$
$5 \times 10{,}000 = 50{,}000$
$5 \times 100{,}000 = 500{,}000$

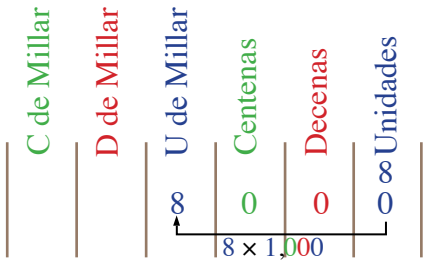


Ejemplo

Multiplicar 8 por 1,000 aumentando ceros.

$8 \times 1{,}000 = 8{,}000$
3 Ceros 3 Ceros

Para comprobar el resultado utilizamos las columnas numéricas, para mostrar que multiplicar por 1,000 es equivalente a recorrer el número 8 tres columnas a la izquierda.



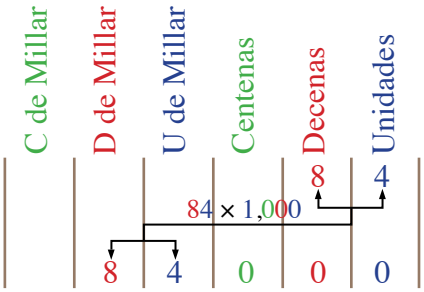
Ejemplo

Multiplicar 84 por 1,000 aumentando ceros.

$$84 \times 1{,}000 = 84{,}000$$

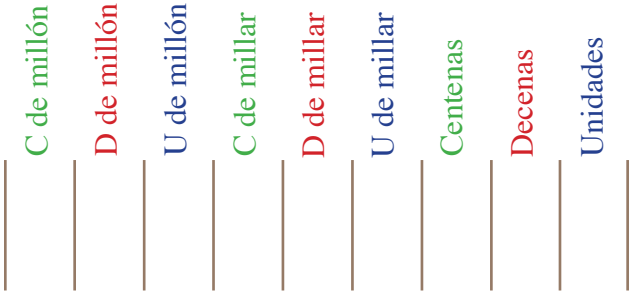
3 Ceros 3 Ceros

Para comprobar el resultado utilizamos las columnas numéricas, para mostrar que multiplicar por 1,000, es equivalente a recorrer el número 84 tres columnas a la izquierda.



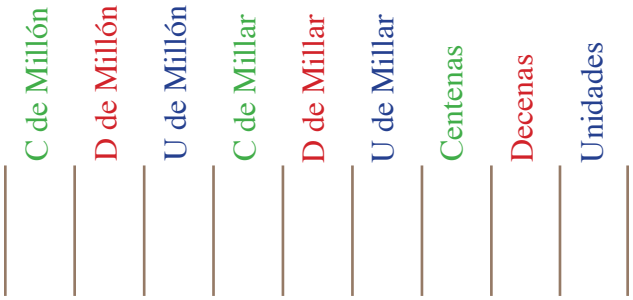
Ejercicio

Multiplica 746 por 10,000 aumentando ceros. Comprueba el resultado utilizando las columnas numéricas.



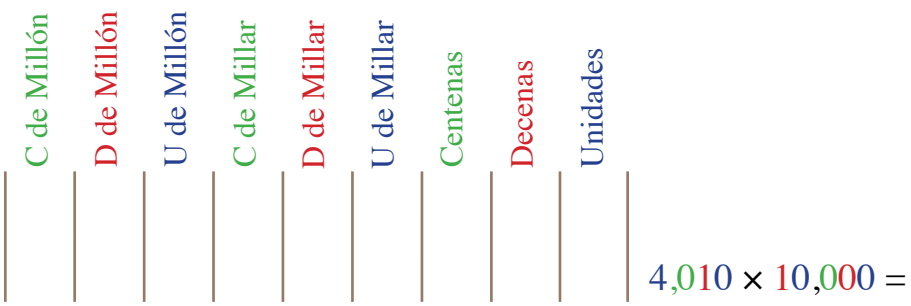
Ejercicio

Multiplica 29 por 100,000 aumentando ceros. Comprueba el resultado utilizando las columnas numéricas.



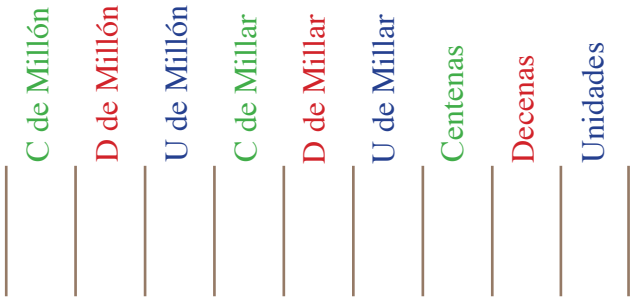
Ejercicio

Multiplica 4,010 por 10,000 aumentando ceros. Comprueba el resultado utilizando las columnas numéricas.



Ejercicio

Multiplica 58 por 10,000,000 aumentando ceros. Comprueba el resultado utilizando las columnas numéricas.



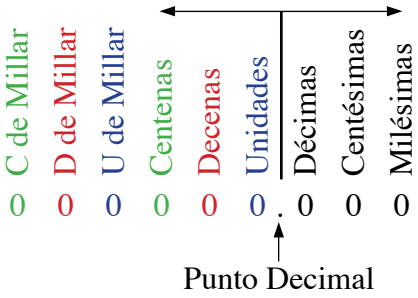
$58 \times 10{,}000{,}000 =$

Multiplicar un número en notación decimal por 10

En el quinto paso para crear el algoritmo de la división, estudiamos el concepto de punto decimal y construimos las columnas numéricas que se encuentran a la derecha de la columna de las unidades.

Multiplicar un número con punto decimal por 10, al igual que lo hicimos con números sin punto decimal, es equivalente a recorrer el número una columna a la izquierda. Ahora bien, recorrer un número que tiene punto decimal una columna a la izquierda, es equivalente a recorrer el punto decimal un lugar a la derecha.

Recordemos que las columnas numéricas que se encuentran a la izquierda del punto decimal, se recorren de derecha a izquierda y las que se encuentran a la derecha, se recorren de izquierda a derecha.



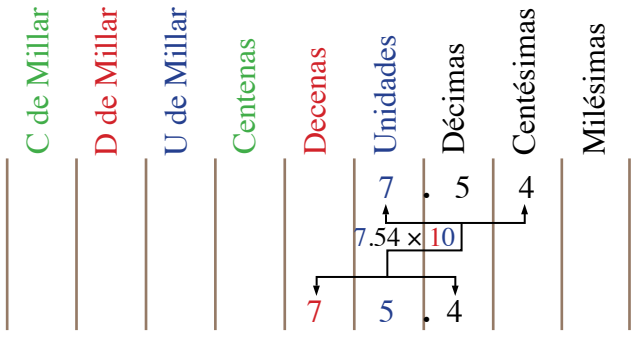
Ejemplo

Multiplicar 7.54 por 10, recorriendo el punto decimal hacia la derecha.

$7.54 \times 10 = 75.4$

Punto Decimal — 1 Cero — 1 Lugar

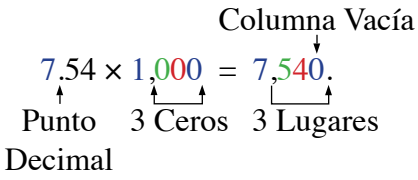
Para comprobar el resultado utilizamos las columnas numéricas, para mostrar que multiplicar por 10 un número, con o sin punto decimal, es equivalente a recorrer el número una columna a la izquierda.



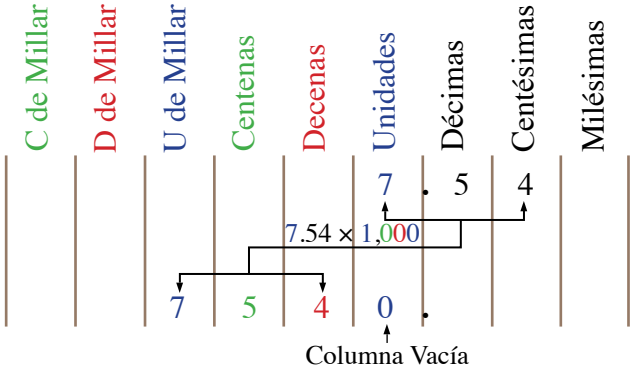
En algunas ocasiones, al recorrer el punto decimal a la derecha, quedan algunas columnas vacías. Recordemos que una columna vacía se representa con el cero.

Ejemplo

Multiplicar 7.54 por 1,000, recorriendo el punto decimal hacia la derecha.

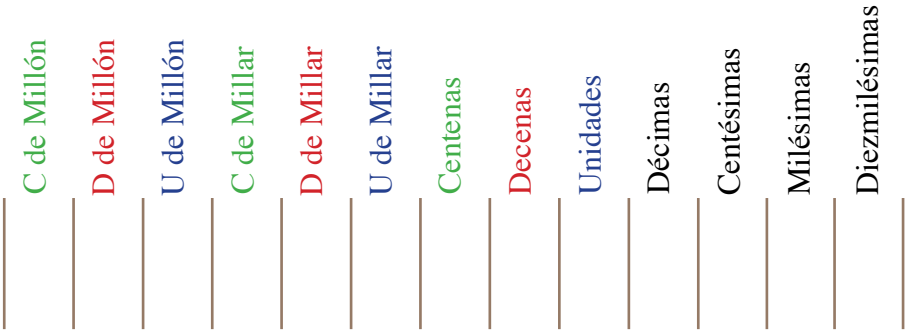


Para comprobar el resultado utilizamos las columnas numéricas, para mostrar que multiplicar por 1,000 un número, con o sin punto decimal, es equivalente a recorrer el número tres columna a la izquierda.



Ejercicio

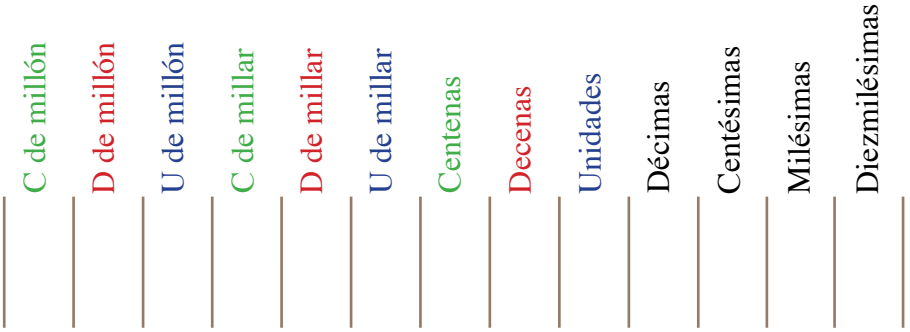
Multiplica 36.15 por 10,000, recorriendo el punto decimal hacia la derecha. Comprueba el resultado utilizando las columnas numéricas.



36.15 × 10,000 =

Ejercicio

Multiplica 836.7094 por 1,000,000, recorriendo el punto decimal hacia la derecha. Comprueba el resultado utilizando las columnas numéricas.



836.7094 × 1,000,000 =

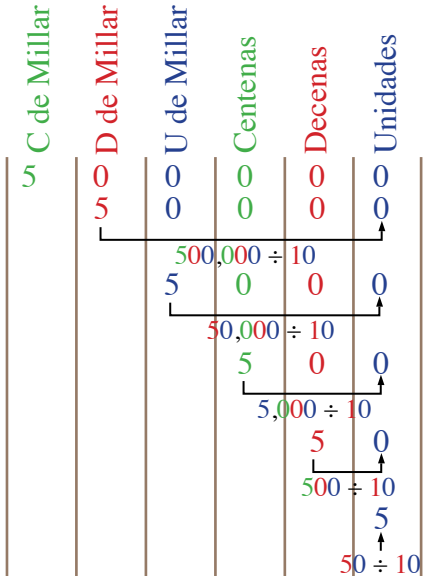
Dividir un número entre 10

Multiplicar un número por 10, consiste en mover el número una columna a la izquierda. Recordemos que, la división es la operación inversa de la multiplicación, por lo cual, dividir un número entre 10, consiste en moverlo una columna a la derecha.

La unidad que se encuentra a la derecha de una columna, es la décima parte de la unidad de la columna a su izquierda. 100 es la décima parte de 1,000, 10 es la décima parte de 100 y 1 es la décima parte de 10.

Dividir un número por 10, 100, 1,000, 10,000, 100,000, etcétera, es equivalente a disminuir o simplificar ceros al número.

$$\frac{500{,}000}{10} = 50{,}000$$
$$\frac{50{,}000}{10} = 5{,}000$$
$$\frac{5{,}000}{10} = 500$$
$$\frac{500}{10} = 50$$
$$\frac{50}{10} = 5$$



Ejemplo

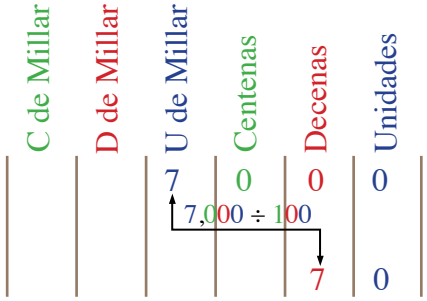
Dividir 7,000 entre 100, simplificando ceros.

2 Ceros

$$\frac{7{,}000}{100} = 70$$

2 Ceros

Para comprobar el resultado utilizamos las columnas numéricas, para mostrar que dividir entre 100, es equivalente a recorrer el número 7,000 dos columnas a la derecha.



Ejemplo

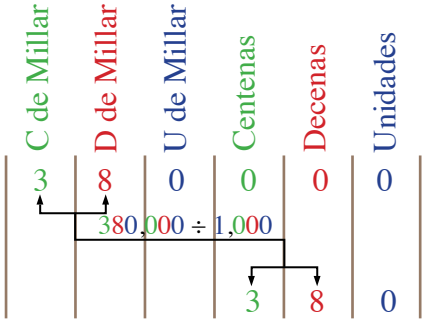
Dividir 380,000 entre 1,000, simplificando ceros.

3 Ceros

$$\frac{380{,}000}{1{,}000} = 380$$

3 Ceros

Para comprobar el resultado utilizamos las columnas numéricas, para mostrar que dividir entre 100, es equivalente a recorrer el número 7,000 dos columnas a la derecha.



Para evitar confusiones y errores, cuando el número no tiene cifras antes del punto decimal, se acostumbra escribir 0 en la columna de las unidades.

Evita Confusiones

$0.0962 = .0962$

Puede Confundir

Cuando un número no tiene decimales, sabemos que el punto decimal se encuentra a la derecha de la cifra de las unidades.

Ejemplo

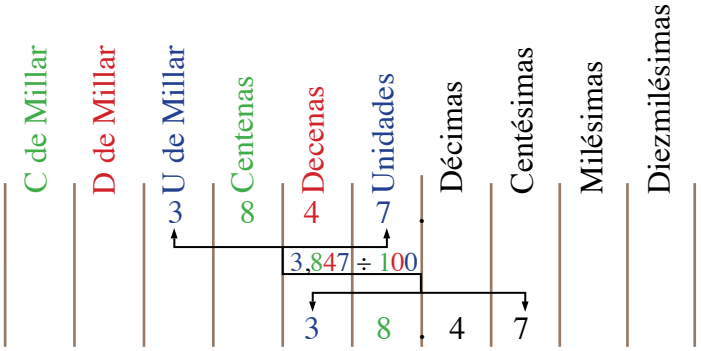
Dividir 3,847 entre 100, recorriendo el punto decimal hacia la izquierda.

Punto Decimal

$$\frac{3{,}847}{100} = 38.47$$

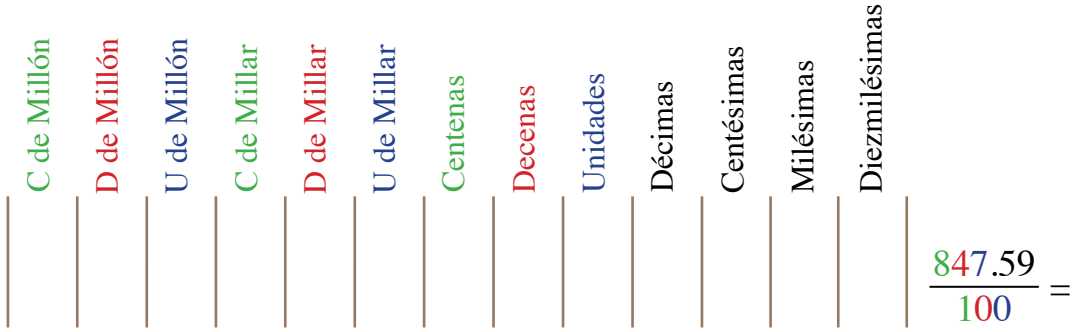
2 Ceros — 2 Lugares

Comprobamos el resultado, utilizando las columnas numéricas.



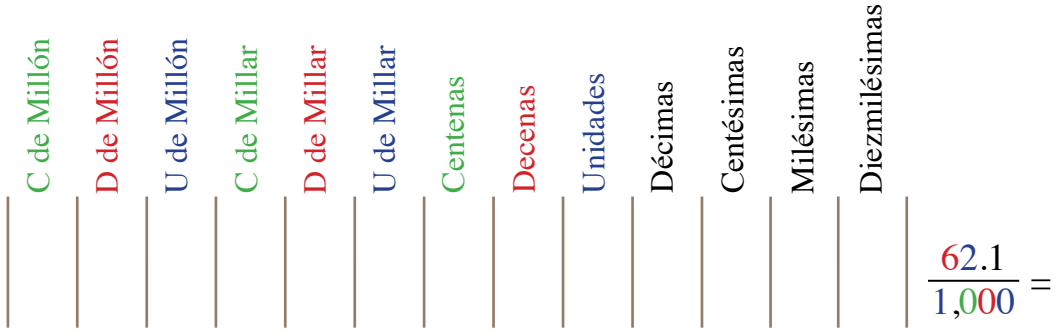
Ejercicio

Divide 847.59 entre 100, recorriendo el punto decimal. Comprueba el resultado utilizando las columnas numéricas.



Ejercicio

Divide 62.1 entre 1,000, recorriendo el punto decimal. Comprueba el resultado utilizando las columnas numéricas.



Divisibilidad de los Números Naturales

División exacta de un número entre otro

Una de las ramas de las matemáticas, la teoría de los números, se dedica a estudiar el comportamiento de los números. Uno de los problemas que los matemáticos han analizado es la divisibilidad de los números naturales, es decir, las condiciones que un número debe cumplir para que se divida en forma exacta entre otro número.

Ejemplo

Decimos que 16 es divisible entre 2, 72 es divisible entre 6 y 423 es divisible entre 9, porque el resultado de las divisiones es exacto, es decir, no tienen residuo.

$$\frac{16}{2} = 8 \qquad \frac{72}{6} = 12 \qquad \frac{423}{9} = 47$$

Números divisibles entre 2

Es muy fácil identificar los números que son divisibles entre 2, ya que todos los números pares, lo son.

Ejemplo

$$\underset{\downarrow}{8} \div 2 = 4 \qquad \underset{\downarrow}{22} \div 2 = 11 \qquad \underset{\downarrow}{176} \div 2 = 88 \qquad \underset{\downarrow}{3{,}940} \div 2 = 1{,}970$$

Número Par — Número Par — Número Par — Número Par

Construir una tabla de números divisibles entre 2, resulta muy sencillo, ya que es la misma, que la que elaboramos cuando estudiamos los números pares e impares.

Impar	Par	Impar	Par	Impar	Par	Impar	Par	Impar	Par
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
....	....	....	....	....	....	....	....	....	....

Números Divisibles Entre 2

Ejercicio

Prueba que 2,758, 350 y 5,064 son números divisibles entre 2.

Ejercicio

Prueba que 483, 2,869 y 407 son números que no son divisibles entre 2.

Números divisibles entre 5

Todos los números que terminan en 5 o en 0, son divisibles entre 5.

Ejemplo

Termina en 5 $\quad$ Termina en 0 $\quad$ Termina en 5 $\quad$ Termina en 0

$$\frac{25}{5} = 5 \qquad \frac{80}{5} = 16 \qquad \frac{235}{5} = 47 \qquad \frac{3{,}970}{5} = 794$$

También resulta muy sencillo, construir la tabla de los números divisibles entre 5, ya que podemos utilizar la tabla de los números pares e impares.

Impar	Par	Impar	Par	Impar	Par	Impar	Par	Impar	Par
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
....	....	....	....	....	....	....	....	....	....

Números Divisibles Entre 5

Ejercicio

Prueba que 475, 1,110 y 835 son números divisibles entre 5.

Ejercicio

Prueba que 504, 657 y 5,309 son números que no son divisibles entre 5.

Números divisibles entre 10

Todos los números que terminan en 0, son divisibles entre 10.

En la sección anterior, demostramos este concepto, utilizando la simplificación de ceros.

Ejemplo

$$\underset{\downarrow}{40} \div 10 = 4 \qquad \underset{\downarrow}{960} \div 10 = 96 \qquad \underset{\downarrow}{2{,}650} \div 10 = 265 \qquad \underset{\downarrow}{8{,}020} \div 10 = 802$$

Termina en 0 — Termina en 0 — Termina en 0 — Termina en 0

Todos los números que terminan en 0, son divisibles entre 5 y entre 10.

Resumen de la divisibilidad de números

Número Divisible Entre	Condición	También Es Divisible Entre
2	Que sea un número par.	
3	Que la suma de los dígitos que lo forman, sea divisible entre 3.	
4	Que el número formado por los últimos dos dígitos, sea divisible entre 4.	2
5	Que el último dígito del número, sea 5 o 0.	
6	Que el número sea par y divisible entre 3.	2 y 3
9	Que la suma de los dígitos que lo forman, sea divisible entre 9.	3
10	Que el último dígito del número sea 0.	2 y 5

Impar	Par	Impar	Par	Impar	Par	Impar	Par	Impar	Par
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	Números Divisibles Entre 2		Números Divisibles Entre 2	Números Divisibles Entre 5	Números Divisibles Entre 2		Números Divisibles Entre 2		Números Divisibles Entre 2, 5 y 10

Conclusión importante de la divisibilidad de números

Los números que aparecen en verde, significa que todos los números que terminan en 2, 4, 5, 6, 8 y 10 son al menos divisibles entre 2, 5 o 10.

Esta observación es muy importante, ya que en la siguiente sección, estudiaremos los números primos y como veremos, los números en verde no pueden ser números primos.

Serie de Ejercicios 6

Determina si los números pueden dividirse en forma exacta entre 2, 3, 4, 5, 6, 9 o 10.

351

610

984

1,560

198

228

230

2,250

884

1,956

Números primos

La palabra primo, viene del latín primero, por lo cual, los números primos son los números primarios, o aquellos que forman a los demás números.

Un número primo no se origina de la multiplicación de otros números, ya que son los que forman a los demás números, por lo tanto, no son divisibles en forma exacta entre ningún otro número.

Definición de número primo

Un número primo es aquel número que solamente puede ser dividido en forma exacta entre sí mismo y entre 1.

Todos los números primos terminan en 1, 3, 7 o 9, con excepción del número 2 y del número 5 que son números primos, ya que solamente pueden ser divididos en forma exacta entre sí mismos y entre 1.

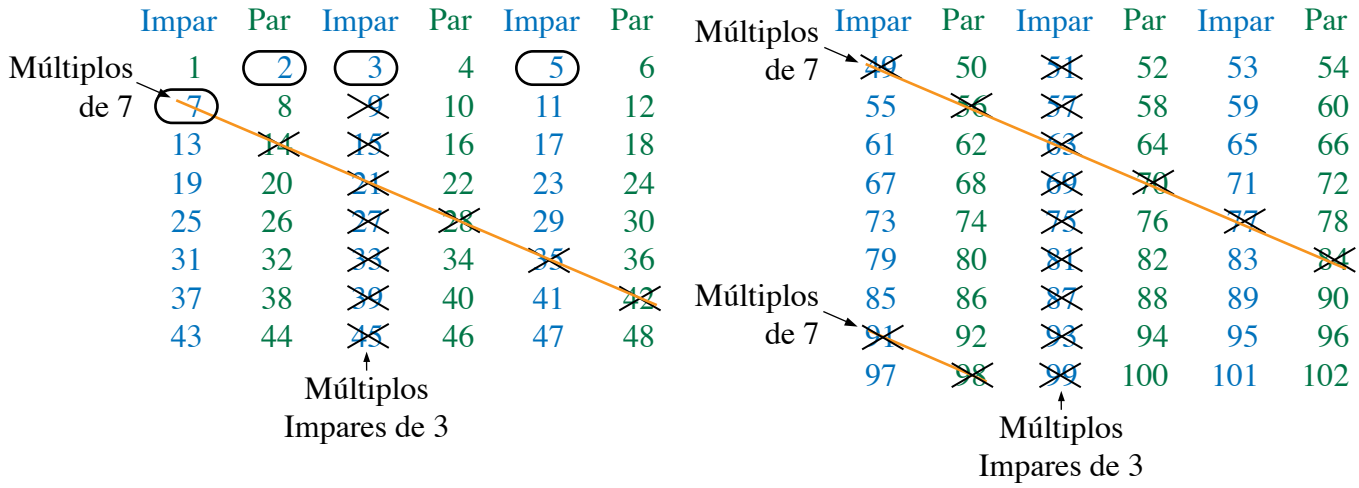
El número 1 no se considera un número primo, porque no cumple con la condición de solamente poder dividirse entre si mismo y 1, ya que él mismo es 1.

Tabla de números primos

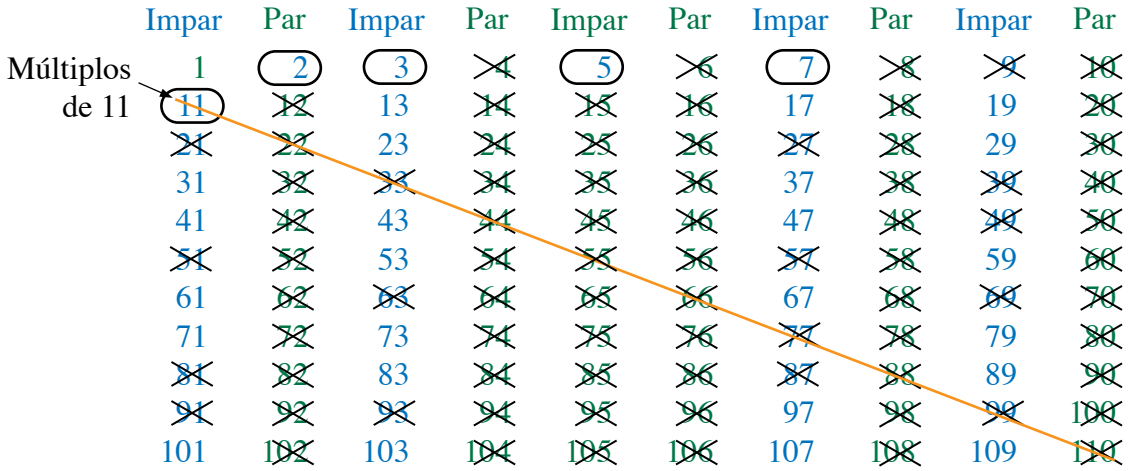
No es sencillo obtener la tabla de los números primos porque no guardan ninguna secuencia, ya que aparecen en forma irregular. Solamente en una ocasión dos primos aparecen juntos, el 2 y el 3.

Desde el tiempo antes de Cristo, los griegos trataron de crear una forma que nos permita encontrar los números primos. Erastófenes (275-194 A.C.) propuso un método que llamamos la "Criba de Erastófenes" que consiste en cribar o colar los números, es decir, ir eliminando aquellos que no son primos. Todos los números múltiplos de 2, 3, 5, 7, 11, etcétera, no son números primos. Todos los múltiplos de 2 son números pares y los múltiplos de 5 son números que terminan en 5 o en 0. Estos números ya los hemos localizado.

Para localizar fácilmente los números impares múltiplos de 3 y los números múltiplos de 7, construimos la siguiente tabla.



Tachamos o eliminamos todos los números impares múltiplos de 3 y de 7, ya que no pueden ser números primos. Esto se muestra en la siguiente tabla, en la cual también eliminamos los números múltiplos de 11.



Seleccionamos los números que no hemos eliminados, para crear la tabla de los número primos del 1 al 110.

Impar	Par	Impar	Par	Impar	Par	Impar	Par	Impar	Par
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
....	....	....	....	....	....	....	....	....	....

Ejercicio

Demuestra que 43 y 59 son números primos y que 57 y 91 son no primos.

Ejercicio

Encuentra tres números no primos que se encuentren entre 110 y 150.

El número cero

El cero es el símbolo que utilizamos para indicar que una columna numérica está vacía. El número cero no es como los demás, por lo cual tiene sus propias reglas.

El número uno

El número uno también es muy especial, ya que es el número que genera los otros ocho dígitos.

1
2 = 1 + 1
3 = 1 + 1 + 1
4 = 1 + 1 + 1 + 1
5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1
6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1
7 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1
8 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1
9 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1

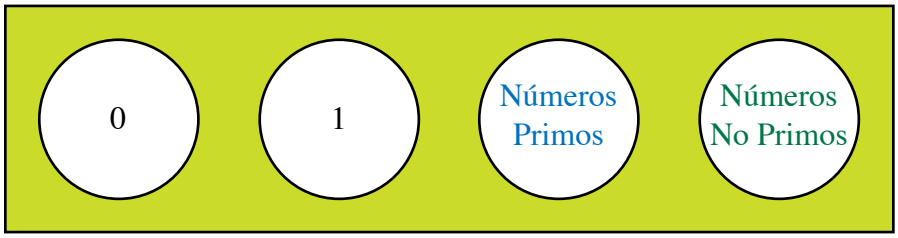
El uno tiene un papel importante cuando analizamos el comportamiento de los otros números.

Clasificación de los números naturales

Una manera de clasificar los números naturales es separarlos en conjuntos de números de acuerdo a alguna propiedad común.

Una forma sencilla de hacerlo es clasificarlos en números primos y no primos. Recordemos también,- que el cero y el uno son dígitos especiales.

Para hacer la representación gráfica de la clasificación de los números utilizamos un círculo para indicar un conjunto de números.



Teorema Fundamental de la Aritmética

Enunciado del teorema fundamental de la aritmética

Todos los números que no son primos, pueden crearse cuando multiplicamos dos o más números primos.

Recordemos que el nombre primo, significa primero o primario, es decir del que vienen los demás. El teorema fundamental de la aritmética es lo que especifica, que todos los números se crean multiplicando los números primeros o primarios.

Ejemplo

Utilizando el teorema fundamental de la aritmética, crear los primeros veintiún números naturales.

Los números primos o primarios no los creamos, ya que son los que nos sirven para crear los demás.

0	1	(2)	(3)	4	(5)	6	(7)	8	9	10
(11)	12	(13)	14	15	16	(17)	18	(19)	20	21

Utilizando los números primos que están en azul, vamos a crear los números no primos que están en verde.

$2 \times 2 = 4$	$3 \times 3 = 9$	$2 \times 7 = 14$	$2 \times 3 \times 3 = 18$
$2 \times 3 = 6$	$2 \times 5 = 10$	$3 \times 5 = 15$	$2 \times 2 \times 5 = 20$
$2 \times 2 \times 2 = 8$	$2 \times 2 \times 3 = 12$	$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$	$3 \times 7 = 21$

Ejercicio

Aplicando el teorema fundamental de la aritmética, construye los números 25, 36, 45, 64, 70 y 96. Utiliza los números primos 2, 3, 5 y 7.

Descomponer un número no primo en sus factores primos

Descomponer un número no primo en sus factores primos, es efectuar la operación inversa de crearlo, es decir debemos encontrar los números primos que lo forman.

Les llamamos factores porque son los números que se multiplican.

Ejemplo

Descomponer los números no primos 16 y 21 en sus factores primos.

En el ejemplo de la página anterior creamos los números no primos 16 y 21. Ahora, hacemos la operación inversa, los descomponemos en los números primos que los forman.

$$16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$$
$$21 = 3 \times 7$$

Para sumar y restar números fraccionarios, necesitamos conocer el mínimo común denominador, para calcularlo, debemos descomponer los números no primos en sus factores primos.

Debido a que para resolver operaciones con fracciones necesitamos descomponer números no primos en sus factores primos, vamos a crear un algoritmo que nos permita hacerlo en forma sencilla y organizada.

Algoritmo para descomponer un número no primo en sus factores primos

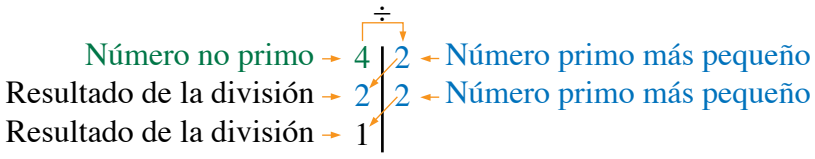
Recordemos que para construir un número no primo, multiplicamos los factores primos que lo forman. Descomponer un número no primo en sus factores primos es la operación inversa, es decir consiste en encontrar los números primos que lo dividen en forma exacta.

Para encontrar estos números utilizamos un procedimiento que consiste en cuatro pasos.

1. Escribimos el número no primo y frente a él trazamos una raya vertical.
2. Encontramos el número primo más pequeño que lo divide en forma exacta. Escribimos este número primo a la derecha de la raya vertical y el resultado de la división debajo del número que hemos dividido.
3. Encontramos el número primo más pequeño que divide en forma exacta al número que resulta de la división del paso 2. Escribimos este número primo debajo del primo que se generó en el paso 2 y el resultado de la división, debajo del número que hemos dividido.
4. Repetimos el procedimiento tantas veces como sea necesario, hasta que el resultado de la división sea uno.

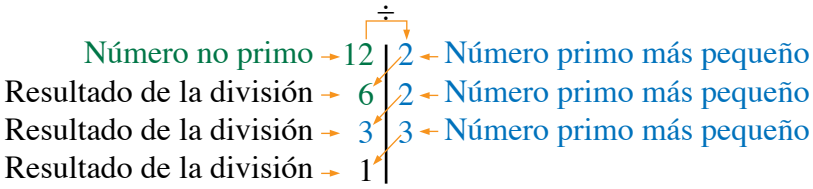
Ejemplo

Descomponer 4, en sus factores primos.



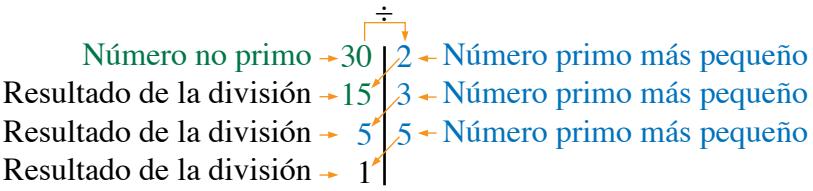
Ejemplo

Descomponer 12, en sus factores primos.



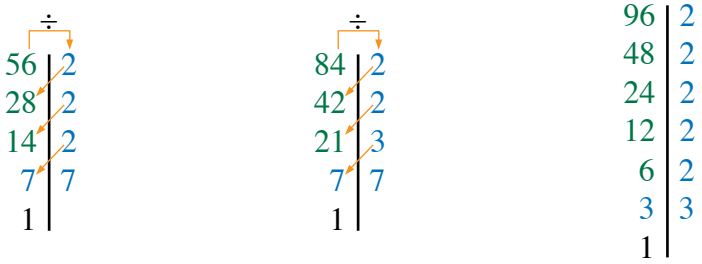
Ejemplo

Descomponer 30, en sus factores primos.



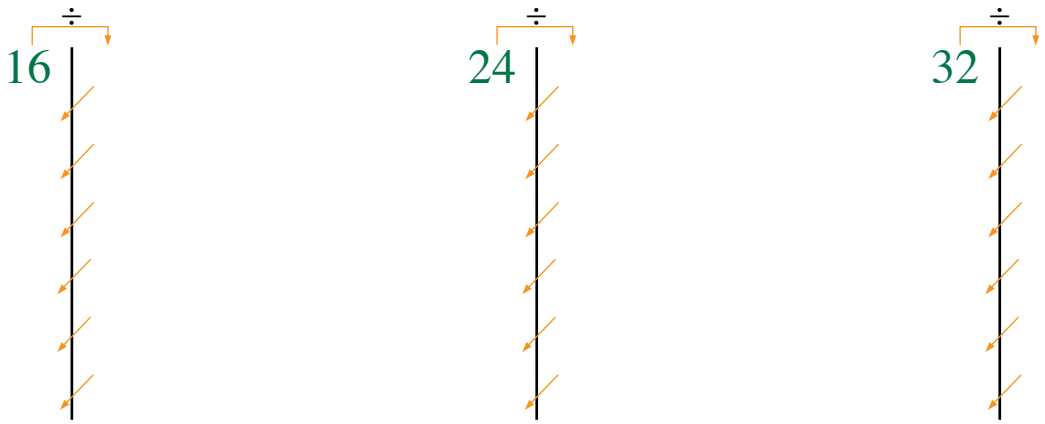
Ejemplo

Descomponer 56, 84 y 96, en sus factores primos.



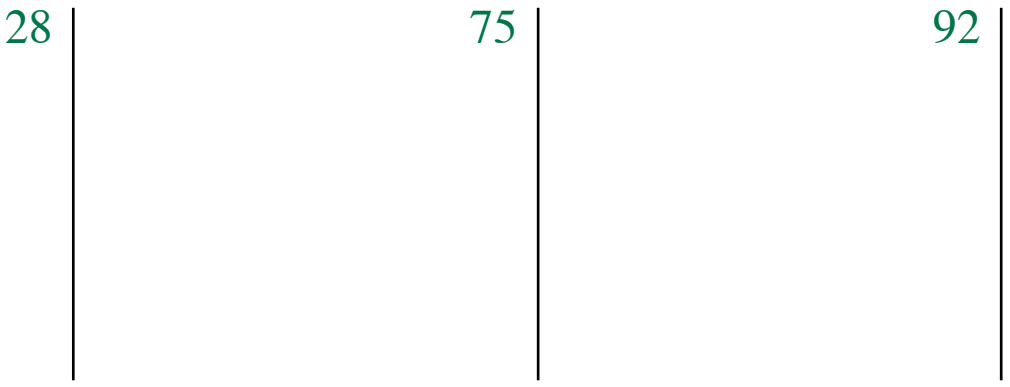
Ejercicio

Descomponer 16, 24 y 32, en sus factores primos.



Ejercicio

Descomponer 28, 75 y 92, en sus factores primos.



Los factores primos de un número no primo

El teorema fundamental de la aritmética establece que todos los números no primos se obtienen multiplicando los números primos que los componen.

Si descomponemos un número no primo en sus factores primos, es decir, los números primos que lo componen, encontramos los números primos que lo dividen en forma exacta.

Ejemplo

Descomponer en sus factores primos 12, 18 y 24 y demostrar que sus factores primos los dividen en forma exacta.

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad 12 = 2 \times 2 \times 3$$

$$\frac{12}{2} = 6 \qquad \frac{12}{3} = 4$$

$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad 18 = 2 \times 3 \times 3$$

$$\frac{18}{2} = 9 \qquad \frac{18}{3} = 6$$

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad 24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

$$\frac{24}{2} = 12 \qquad \frac{24}{3} = 8$$

Ahora bien, la multiplicación de todas las posibles combinaciones de los factores primos, también dividen al número no primo en forma exacta.

Ejemplo

Hacer la multiplicación de todas las posibles combinaciones de los factores primos de 12, 18 y 24. Demostrar que la multiplicación de todas las posibles combinaciones de ellos, dividen a los números en forma exacta.

$12 = 2 \times 2 \times 3$

Posibles combinaciones de los factores primos:

$2 \times 2 = 4$
$2 \times 3 = 6$
$2 \times 2 \times 3 = 12$

$\frac{12}{2} = 6 \qquad \frac{12}{3} = 4$

$\frac{12}{4} = 3 \qquad \frac{12}{6} = 2$

$\frac{12}{12} = 1$

$18 = 2 \times 3 \times 3$

$2 \times 3 = 6$
$3 \times 3 = 9$
$2 \times 3 \times 3 = 18$

$\frac{18}{2} = 9 \qquad \frac{18}{3} = 6$

$\frac{18}{6} = 3 \qquad \frac{19}{9} = 2$

$\frac{18}{18} = 1$

$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$

$2 \times 2 = 4 \qquad 2 \times 2 \times 3 = 12$
$2 \times 3 = 6 \qquad 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$
$2 \times 2 \times 2 = 8$

$\frac{24}{2} = 12 \qquad \frac{24}{3} = 8$

$\frac{24}{4} = 6 \qquad \frac{24}{6} = 4$

$\frac{24}{8} = 3 \qquad \frac{24}{12} = 2 \qquad \frac{24}{24} = 1$

Ejemplo

Descomponer 15, 20 y 30 en sus factores primos. Hacer la multiplicación de todas las posibles combinaciones de los factores primos. Demostrar que los factores primos de los números y la multiplicación de todas las posibles combinaciones de ellos, dividen a los números en forma exacta.

$$\begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$15 = 3 \times 5$ $\qquad$ $20 = 2 \times 2 \times 5$ $\qquad$ $30 = 2 \times 3 \times 5$

Posibles combinaciones de los factores primos:

$3 \times 5 = 15$

$\frac{15}{3} = 5 \qquad \frac{15}{5} = 3$

$\frac{15}{15} = 1$

$2 \times 2 = 4$

$2 \times 5 = 10$

$2 \times 2 \times 5 = 20$

$\frac{20}{2} = 10 \qquad \frac{20}{5} = 4$

$\frac{20}{4} = 5 \qquad \frac{20}{10} = 2$

$\frac{20}{20} = 1$

$2 \times 3 = 6$

$2 \times 5 = 10$

$3 \times 5 = 15$

$2 \times 3 \times 5 = 30$

$\frac{30}{2} = 15 \qquad \frac{30}{3} = 10 \qquad \frac{30}{5} = 6$

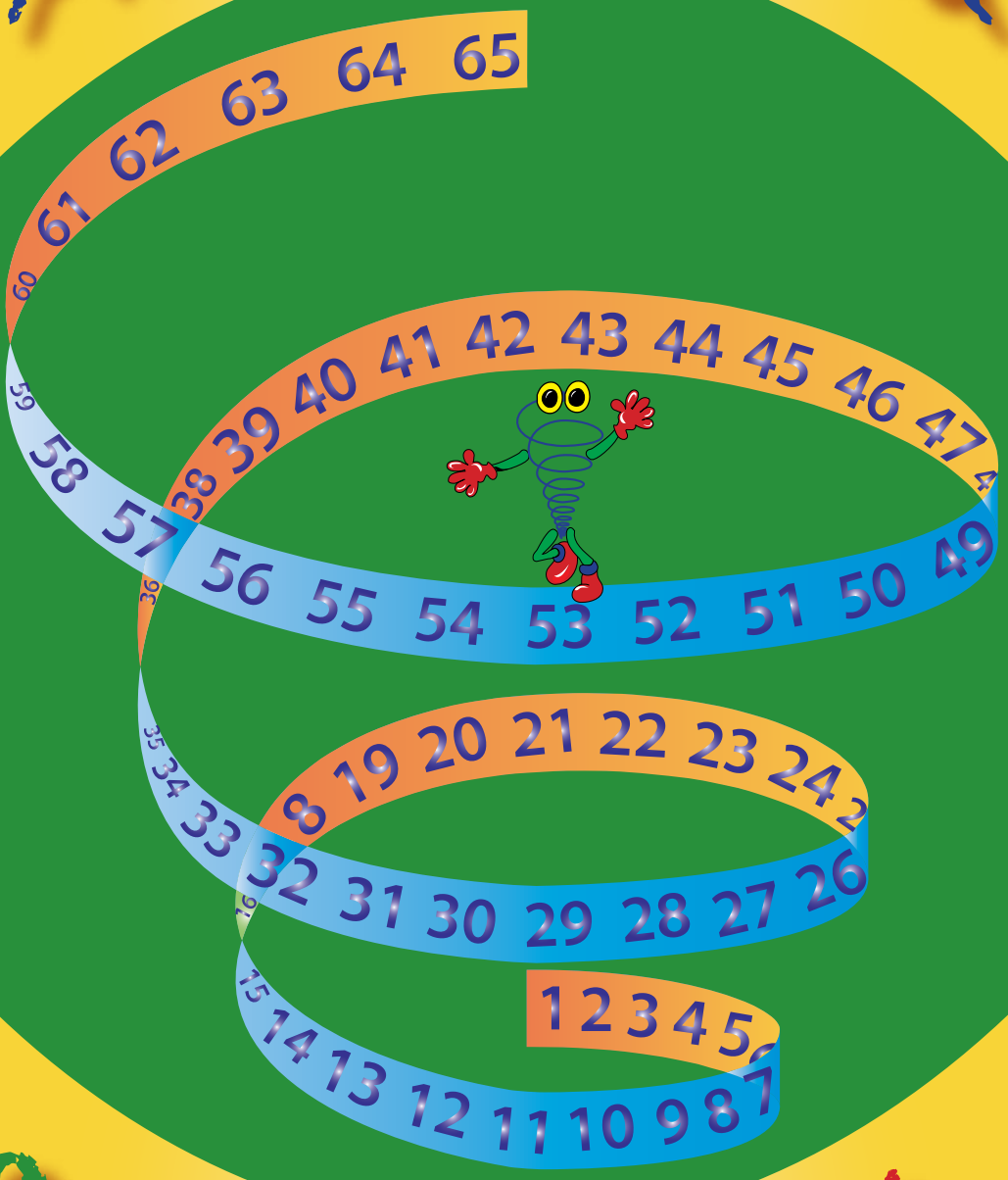
$\frac{30}{6} = 5 \qquad \frac{30}{10} = 3$

$\frac{30}{15} = 2 \qquad \frac{30}{30} = 1$

Ejercicio

Descomponer 36 y 42 en sus factores primos. Hacer la multiplicación de todas las posibles combinaciones de los factores primos. Demostrar que los factores primos de los números y la multiplicación de todas las posibles combinaciones de ellos, dividen a los números en forma exacta.

Aritmética



Quinto Ano

MORENO

Definición de números primos y no primos utilizando la división

Utilizando la división, podemos crear otra definición de números primos y no primos.

Un número no primo, es un número natural, que puede dividirse en forma exacta, entre uno o varios números primos.

$$\underset{\text{primos}}{3 \times 5} = \underset{\text{no primo}}{15} \longrightarrow \frac{15}{3} = 5 \longrightarrow \frac{15}{5} = 3$$

$$\underset{\text{primos}}{2 \times 3 \times 7} = \underset{\text{no primo}}{42} \longrightarrow \frac{42}{2} = 21 \longrightarrow \frac{42}{3} = 14 \longrightarrow \frac{42}{7} = 6$$

Un número primo, es un número natural, que solamente puede dividirse en forma exacta, entre sí mismo o entre 1.

$$\text{primo} \rightarrow 3 \longrightarrow \frac{3}{3} = 1 \longrightarrow \frac{3}{1} = 3$$

$$\text{primo} \rightarrow 5 \longrightarrow \frac{5}{5} = 1 \longrightarrow \frac{5}{1} = 5$$

$$\text{primo} \rightarrow 7 \longrightarrow \frac{7}{7} = 1 \longrightarrow \frac{7}{1} = 7$$

Ejercicio

Demuestra que el número no primo 70, se divide en forma exacta entre 2, 5 y 7, que son los números primos que lo crean.

$$2 \times 5 \times 7 = 70$$

$$\underset{\text{no primo}}{\frac{70}{2}} = \qquad \underset{\text{no primo}}{\frac{70}{5}} = \qquad \underset{\text{no primo}}{\frac{70}{7}} =$$

$$\underset{\text{primo}}{2} \qquad \underset{\text{primo}}{5} \qquad \underset{\text{primo}}{7}$$

Factores primos de un número natural

A los números primos que dividen en forma exacta a un número no primo, les llamamos factores primos.

Ejemplo

Demostrar que 2, 5 y 7 son los factores primos de 70, ya que lo dividen en forma exacta.

$$\frac{70}{2} = 35 \qquad \frac{70}{5} = 14 \qquad \frac{70}{7} = 10$$

$$\underset{\text{factores primos}}{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

Ejercicio

Encuentra los factores primos de 72, cuenta cuántas veces se repiten y demuestra que multiplicándolos se crea el número no primo 72.

Descomponer un número no primo en sus factores primos

Multiplicando números primos, creamos números no primos, utilizando la división, la operación inversa de la multiplicación, podemos conocer los números primos, que los crearon, a los que llamamos factores primos.

Ejemplo

Encontrar los factores primos del número no primo 18.

Para encontrar los factores primos en forma ordenada, primero dividimos 18, entre el número primo más pequeño que lo divide en forma exacta, que es 2.

$$\frac{18}{2} = 9 \quad \rightarrow \quad 18 = 2 \times 9$$

Ahora dividimos 9 entre 3, que es el número primo más pequeño que lo divide en forma exacta.

$$18 = 2 \times 9 \quad \rightarrow \quad \frac{9}{3} = 3 \quad \rightarrow \quad 9 = 3 \times 3 \quad \rightarrow \quad 18 = 2 \times 3 \times 3$$

3 es un número primo, por lo cual, ya no puede descomponerse en factores.

Ejemplo

Encontrar los factores primos del número no primo 24.

Para encontrar los factores primos en forma ordenada, primero dividimos 24, entre el número primo más pequeño que lo divide en forma exacta, que es 2.

$$\frac{24}{2} = 12 \quad \rightarrow \quad 24 = 2 \times 12$$

Ahora dividimos 12 entre 2, que es el número primo más pequeño que lo divide en forma exacta.

$$24 = 2 \times 12 \quad \rightarrow \quad \frac{12}{2} = 6 \quad \rightarrow \quad 12 = 2 \times 6 \quad \rightarrow \quad 24 = 2 \times 2 \times 6$$

6 es un número no primo, por lo cual, lo dividimos entre 2, que es el número primo más pequeño que lo divide en forma exacta.

$$24 = 2 \times 2 \times 6 \quad \rightarrow \quad \frac{6}{2} = 3 \quad \rightarrow \quad 6 = 2 \times 3 \quad \rightarrow \quad 24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

3 es un número primo, por lo tanto, ya no puede descomponerse en factores.

Podemos hacer exactamente las mismas operaciones, pero escribiendo menos y ocupando menos espacio, si creamos un procedimiento.

Un procedimiento para hacer un pastel, le llamamos una receta de cocina, y consiste en los pasos, que en forma ordenada debemos seguir, para hacer el pastel.

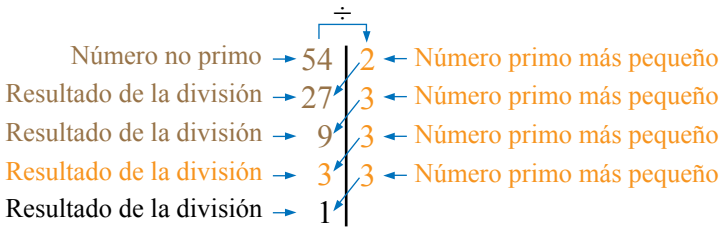
En matemáticas, a un procedimiento le llamamos algoritmo, y consiste precisamente en los pasos, que en forma ordenada debemos seguir, para resolver un problema.

Algoritmo para descomponer un número no primo en sus factores primos

1. Escribimos el número no primo, y frente a él trazamos una raya vertical.
2. Encontramos el número primo más pequeño, que divide al número no primo en forma exacta. Escribimos este número primo, a la derecha de la raya vertical, y el resultado de la división, debajo del número no primo que hemos dividido.
3. Encontramos el número primo más pequeño, que divide en forma exacta al número no primo que resulta de la división del paso 2. Escribimos este número primo, debajo del número primo del paso 2, y el resultado de la división, debajo del número no primo que hemos dividido.
4. Repetimos el procedimiento, tantas veces como sea necesario, hasta que el resultado de la división sea 1.

Ejemplo

Descomponer el número no primo 54, en sus factores primos.

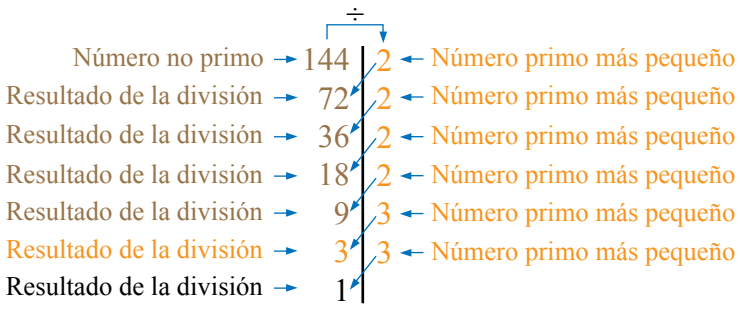


Los factores primos que crean al número no primo 54 son:

$$54 = 2 \times 3 \times 3 \times 3$$

Ejemplo

Descomponer el número no primo 144, en sus factores primos.

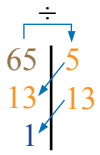


Los factores primos que crean al número no primo 144 son:

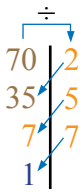
$$144 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

Ejemplo

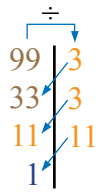
Descomponer los números no primos 65, 70, 99, 80, 120 y 252, en sus factores primos.



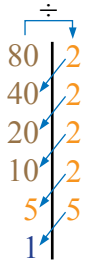
$65 = 5 \times 13$



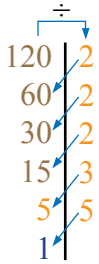
$70 = 2 \times 5 \times 7$



$99 = 3 \times 3 \times 11$



$80 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5$



$120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$



$252 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7$

Ejercicio

Descomponer los números no primos, en sus factores primos.

105 =

125 =

148 =

150 =

176 =

225 =

260 =

312 =

396 =

410 | 525 | 616

410 = 525 = 616 =

Relación de los números naturales con la suma, multiplicación y división

Todos los números naturales, sin importar si son primos o no primos, se pueden crear utilizando el 1 y la operación suma. Sin embargo, utilizando la multiplicación, que es la operación que nos ayuda a sumar más rápido, podemos ahorrar tiempo al crear números.

Para usar la suma rápida, es decir, la multiplicación, para crear números, primero creamos, utilizando el 1 y la suma, los números primos o primarios, o sea, aquellos números naturales que solamente pueden ser creados de esta forma, y que nos servirán para crear los demás números naturales, los no primos o no primarios, usando la multiplicación.

$1 + 1 = 2$
$1 + 1 + 1 = 3$
$1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$
$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 7$
$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 11$
$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 13$
$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 17$
$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 19$

Tomamos el primer número primo 2, y usando la multiplicación, creamos múltiplos de 2, que son números no primos.

$2 \times 2 = 4$
$2 \times 2 \times 2 = 8$
$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$
$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$
$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$

Debido a que la división es la operación inversa de la multiplicación, todos los números no primos que creamos, se pueden dividir en forma exacta, entre 2 y los números no primos que resultan de la multiplicación de todas las posibles formas en las cuales podemos agrupar el 2 cuando se repite varias veces.

$\frac{4}{2} = 2 \quad \frac{4}{\underbrace{2 \times 2}_{4}} = 1$

$\frac{8}{2} = 4 \quad \frac{8}{\underbrace{2 \times 2}_{4}} = 2 \quad \frac{8}{\underbrace{2 \times 2 \times 2}_{8}} = 1$

$$\frac{16}{2}=8 \quad \frac{16}{\underbrace{2\times 2}_{4}}=4 \quad \frac{16}{\underbrace{2\times 2\times 2}_{8}}=2 \quad \frac{16}{\underbrace{2\times 2\times 2\times 2}_{16}}=1$$

$$\frac{32}{2}=16 \quad \frac{32}{\underbrace{2\times 2}_{4}}=8 \quad \frac{32}{\underbrace{2\times 2\times 2}_{8}}=4 \quad \frac{32}{\underbrace{2\times 2\times 2\times 2}_{16}}=2 \quad \frac{32}{\underbrace{2\times 2\times 2\times 2\times 2}_{32}}=1$$

$$\frac{64}{2}=32 \quad \frac{64}{\underbrace{2\times 2}_{4}}=16 \quad \frac{64}{\underbrace{2\times 2\times 2}_{8}}=8 \quad \frac{64}{\underbrace{2\times 2\times 2\times 2}_{16}}=4 \quad \frac{32}{\underbrace{2\times 2\times 2\times 2\times 2}_{32}}=2 \quad \frac{64}{\underbrace{2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2}_{64}}=1$$

Ahora, tomamos los dos primeros números primos 2 y 3, usando la multiplicación, creamos algunos números no primos.

$$2\times 3=6 \qquad 2\times 2\times 2\times 3=24$$
$$2\times 2\times 3=12 \qquad 2\times 2\times 3\times 3=36$$
$$2\times 3\times 3=18 \qquad 2\times 3\times 3\times 3=54$$

Todos los números no primos que hemos creamos, se pueden dividir en forma exacta, entre los números primos 2 y 3 que utilizamos para crearlos, y los números no primos que resultan de la multiplicación de todas las posibles combinaciones de estos números primos cuando se repiten varias veces.

$$\frac{6}{2}=3 \quad \frac{6}{3}=2 \quad \frac{6}{\underbrace{2\times 3}_{6}}=1$$

$$\frac{12}{2}=2 \quad \frac{12}{3}=4 \quad \frac{12}{\underbrace{2\times 2}_{4}}=3 \quad \frac{12}{\underbrace{2\times 3}_{6}}=2 \quad \frac{12}{\underbrace{2\times 2\times 3}_{12}}=1$$

$$\frac{18}{2}=9 \quad \frac{18}{3}=6 \quad \frac{18}{\underbrace{2\times 3}_{6}}=3 \quad \frac{18}{\underbrace{3\times 3}_{9}}=2 \quad \frac{18}{\underbrace{2\times 3\times 3}_{18}}=1$$

$$\frac{24}{2}=12 \quad \frac{24}{3}=8 \quad \frac{24}{\underbrace{2\times 2}_{4}}=6 \quad \frac{24}{\underbrace{2\times 3}_{6}}=4 \quad \frac{24}{\underbrace{2\times 2\times 2}_{8}}=3 \quad \frac{24}{\underbrace{2\times 2\times 3}_{12}}=2 \quad \frac{24}{\underbrace{2\times 2\times 2\times 3}_{24}}=1$$

$$\frac{54}{2}=27 \quad \frac{54}{3}=18 \quad \frac{54}{\underbrace{2\times 3}_{6}}=9 \quad \frac{54}{\underbrace{3\times 3}_{9}}=6 \quad \frac{54}{\underbrace{2\times 3\times 3}_{18}}=3 \quad \frac{54}{\underbrace{3\times 3\times 3}_{27}}=2 \quad \frac{54}{\underbrace{2\times 3\times 3\times 3}_{54}}=1$$

Ejemplo

Utilizando los números primos 2, 3 y 5, crear el número no primo 90.

$$2\times 3\times 3\times 5=90$$

Encontrar todas las posibles formas, en las cuales podemos multiplicar los números primos 2, 3, 3 y 5, que forman el número no primo 90.

$$2\times 3=6 \qquad 3\times 5=15 \qquad 2\times 3\times 3=18 \qquad 2\times 3\times 5=30$$
$$2\times 5=10 \qquad 3\times 3=9 \qquad 3\times 3\times 5=45 \qquad 2\times 3\times 3\times 5=90$$

Demostrar que los números primos 2, 3 y 5 y los números no primos 6, 10, 15, 9, 18, 45, 30 y 90, dividen en forma exacta al número no primo 90.

$$\frac{90}{2} = 45 \qquad \frac{90}{3} = 30 \qquad \frac{90}{5} = 18$$

$$\frac{90}{\underbrace{2 \times 3}_{6}} = 15 \qquad \frac{90}{\underbrace{2 \times 5}_{10}} = 9 \qquad \frac{90}{\underbrace{3 \times 5}_{15}} = 6 \qquad \frac{90}{\underbrace{3 \times 3}_{9}} = 10$$

$$\frac{90}{\underbrace{2 \times 3 \times 3}_{18}} = 5 \qquad \frac{90}{\underbrace{3 \times 3 \times 5}_{45}} = 2 \qquad \frac{90}{\underbrace{2 \times 3 \times 5}_{30}} = 3 \qquad \frac{90}{\underbrace{2 \times 3 \times 3 \times 5}_{90}} = 1$$

Ejercicio

Utilizando los números primos 2, 3 y 7, crea el número no primo 84.

Encuentra todas las posibles formas, en las cuales podemos multiplicar los números primos 2, 2, 3 y 7, que forman el número no primo 84.

Demuestra que los números primos 2, 3 y 7 y los números no primos que obtuviste al multiplicar estos números primos, dividen en forma exacta al número no primo 84.

Ejercicio

Utilizando los números primos 2, 3 y 5, crea el número no primo 120.

Encuentra todas las posibles formas, en las cuales podemos multiplicar los números primos 2, 2, 2, 3 y 5, que forman el número no primo 120.

Demuestra que los números primos 2, 3 y 5 y los números no primos que obtuviste al multiplicar estos números primos, dividen en forma exacta al número no primo 120.

Mínimo común múltiplo

Multiplicando números primos, creamos números no primos. Utilizando la misma estrategia, podemos crear números que se dividan en forma exacta, entre dos o más números. A estos números les llamamos común múltiplos. Ya que es posible construir muchos común múltiplos, ponemos especial atención en el común múltiplo más pequeño, al que llamamos mínimo común múltiplo y lo abreviamos como mcm.

Ejemplo

Encontrar el mínimo común múltiplo de 12 y 18.

Primero, descomponemos 12 y 18 en sus factores primos.



Los números 12 y 18, se dividen en forma exacta entre los números primos que los forman y todas las posibles formas en las cuales podemos multiplicarlos.

Ahora bien, si creamos un número que contenga los factores primos de 12, 2,2 y 3, y los de 18, 2, 3 y 3, se podrá dividir en forma exacta entre 12 y 18.

$$\underbrace{2 \times 2 \times 3}_{12} \times \underbrace{2 \times 3 \times 3}_{18} = 216 \longrightarrow \frac{216}{12} = 16 \longrightarrow \frac{216}{18} = 12$$

216 es un común múltiplo de 12 y 18, pero no es el mínimo común múltiplo.

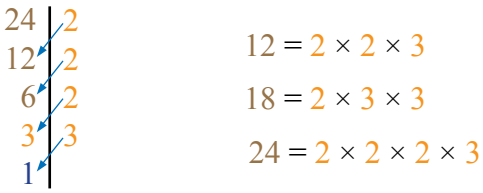
Para crear el mínimo común múltiplo de 12 y 18, tomamos el mínimo número posible de los factores primos que forman a 12 y 18, es decir, sin que se repita ninguno. Del 12 tomamos 2, 2, no tomamos el 3 porque aparece en el 18. Del 18 tomamos 3, 3, no tomamos el 2, porque ya lo tomamos del 12.

$$\text{mcm} = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36 \longrightarrow \frac{36}{12} = 3 \longrightarrow \frac{36}{18} = 2$$

Ejemplo

Encontrar el mínimo común múltiplo de 12, 18 y 24.

Del ejemplo anterior, conocemos los factores primos de 12 y 18, ahora encontramos los de 24.



Tomamos el mínimo número posible de los factores primos que forman a 12, 18 y 24, es decir, sin que se repita ninguno. Del 12 no tomamos ninguno ya que 2, 2, aparece en 24 y 3 en 18. Del 18 tomamos 3, 3, no tomamos el 2, porque está en 12 y 24. Del 24 tomamos 2, 2, 2, no tomamos el 3, porque ya lo tomamos del 18.

$12 = 2 \times 2 \times 3$ $\quad 18 = 2 \times 3 \times 3$ $\quad 24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$

$\text{mcm} = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 72 \longrightarrow \frac{72}{12} = 6 \longrightarrow \frac{72}{18} = 4 \longrightarrow \frac{72}{24} = 3$

Ejemplo

Encontrar el mínimo común múltiplo de 12, 18, 24 y 60.

Del ejemplo anterior, conocemos los factores primos de 12, 18 y 24. Usando la estrategia de la raya vertical, encontramos los de 60 y seleccionamos el mínimo número de factores primos, que forman a los números no primos 12, 18, 24 y 60.

60 | 2	
30 | 2	
15 | 3	
5 | 5	
1	

$12 = 2 \times 2 \times 3$

$18 = 2 \times 3 \times 3$

$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$

$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$

$\text{mcm} = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 360$

$\frac{360}{12} = 30 \longrightarrow \frac{360}{18} = 20 \longrightarrow \frac{360}{24} = 15 \longrightarrow \frac{360}{60} = 6$

Ejercicio

Encuentra el mínimo común múltiplo de 8, 15 y 20.

Primero, determina los factores primos que crean los números.

8 \| 15 \| 20 \|

$8 =$ $\quad 15 =$ $\quad 20 =$

Segundo, selecciona el mínimo número posible de factores primos que crean a todos los números.

$8 =$ $\quad 15 =$ $\quad 20 =$

Tercero, el mínimo común múltiplo es la multiplicación de los factores primos seleccionados.

$\text{mcm} =$

Comprueba, que el mínimo común múltiplo que obtuviste, se divide en forma exacta entre 8, 15 y 20.

$\frac{\quad}{8} = \longrightarrow \frac{\quad}{15} = \longrightarrow \frac{\quad}{20} =$

Para hacer más fácil y cometer menos errores al calcular el mínimo común múltiplo de cualquier conjunto de números, vamos a crear un algoritmo que nos ayude a hacerlo.

Algoritmo para encontrar el mínimo común múltiplo

1. Descomponer los números en sus factores primos.
2. Si alguno de los factores primos se repite en el mismo número, se cuenta cuántas veces se repite.
3. De los factores primos que no se repiten en ninguno de los números, se elige un representante de cada uno de ellos.
4. De los factores primos que sí se repiten en el mismo número –paso 2– se escoge el grupo en el que repite más veces.
5. El mínimo común múltiplo –mcm– es el producto de los factores primos seleccionados.

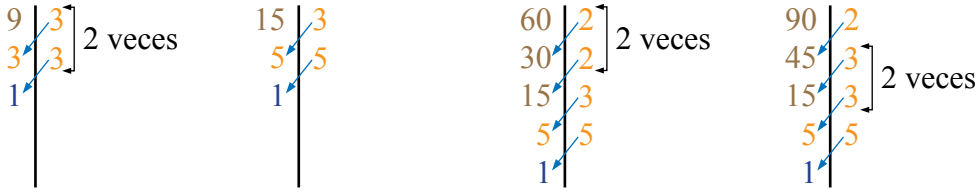
Ejemplo

Encontrar el mínimo común múltiplo de 9, 15, 60 y 90.

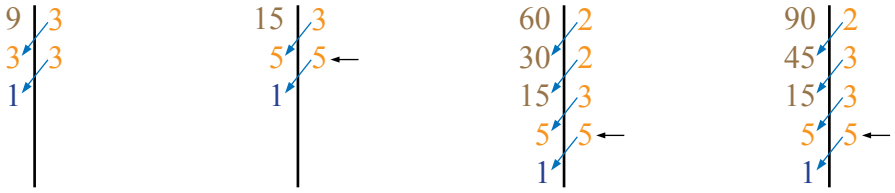
1. Descomponer los números en sus factores primos.



2. Si alguno de los factores primos se repite en el mismo número, se cuenta cuántas veces se repite.



3. De los factores primos que no se repiten en ninguno de los números, se elige un representante de cada uno de ellos.



Representante: 5.

4. De los factores primos que sí se repiten en el mismo número –paso 2– se escoge el grupo en el que repite más veces.

Representantes: 2, 2, 3, 3.

5. El mínimo común múltiplo –mcm– es el producto de los factores primos seleccionados.

$$\text{mcm} = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 180$$

Comprobamos que el resultado es correcto.

$$\frac{180}{9} = 20 \longrightarrow \frac{180}{15} = 12 \longrightarrow \frac{180}{60} = 3 \longrightarrow \frac{180}{90} = 2$$

Ejercicio

Aplicando los cinco pasos del algoritmo, encuentra el mínimo común múltiplo de 16, 40, 70 y 140. Comprueba el resultado.

16	40	70	140

Representantes:

mcm =

Comprobación.

$\frac{\quad}{16} =$ $\frac{\quad}{40} =$ $\frac{\quad}{70} =$ $\frac{\quad}{140} =$

Ejercicio

Aplicando los cinco pasos del algoritmo, encuentra el mínimo común múltiplo de 30, 42, 54 y 90. Comprueba el resultado.

30	42	54	90

Representantes:

mcm =

Comprobación.

$\frac{\quad}{30} =$ $\frac{\quad}{42} =$ $\frac{\quad}{54} =$ $\frac{\quad}{90} =$

Números pares e impares

Cuando creamos un número no primo utilizando el número primo 2, al número no primo creado le llamamos número par. Cuando creamos un número no primo sin utilizar el número primo 2, le llamamos impar.

Todos los números pares e impares que creamos, son números no primos.

Los números fraccionarios

Introducción

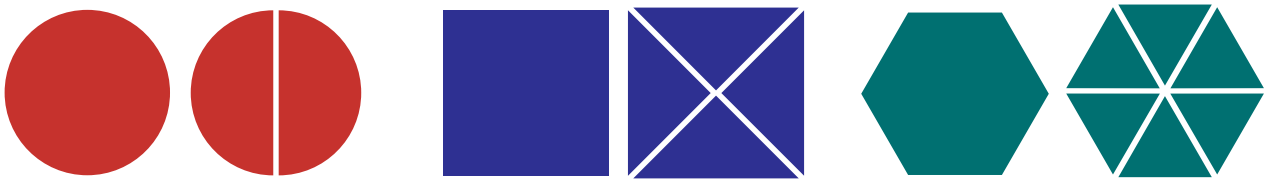
La gran aventura de crear números, no termina en los números enteros, ya que es posible fraccionar, es decir, dividir en partes, los números enteros. El conjunto de números que obtenemos, se llama números fraccionarios.

Concepto de fracción

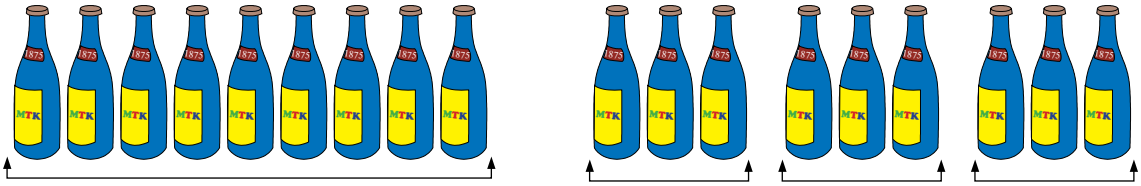
Una fracción consiste en dividir una unidad en partes que son iguales en tamaño, forma y cantidad.

Condición necesaria y suficiente

Cuando partimos o dividimos una unidad en partes, la condición necesaria y suficiente para crear números fraccionarios, es que todas las partes sean iguales en tamaño, forma y cantidad.



Unidad — 2 partes iguales en tamaño y forma — Unidad — 4 partes iguales en tamaño y forma — Unidad — 6 partes iguales en tamaño y forma



Unidad — 3 partes iguales en tamaño, forma y cantidad

Para poder estudiar el tamaño, forma y cantidad de las fracciones, primero tenemos que definir qué es la unidad de una fracción.

Concepto de unidad de una fracción o número fraccionario

La unidad de una fracción es el número entero, el objeto, la figura geométrica, la unidad de medición o el conjunto de objetos, que dividimos en un número de partes.



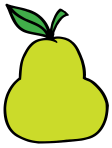
Un número — Un objeto — Una figura geométrica — Una unidad de medición — Un conjunto de objetos

La unidad de una fracción puede ser simple o compuesta.

Unidad simple de una fracción

La unidad de una fracción es simple, cuando el número que fraccionamos es 1, es decir, tenemos 1 objeto, 1 figura geométrica o 1 unidad de medición.


1 manzana

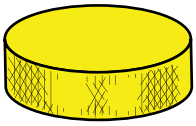

1 pera

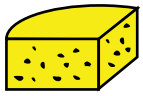

1 cubo


1 prisma


1 círculo


1 metro


1 queso

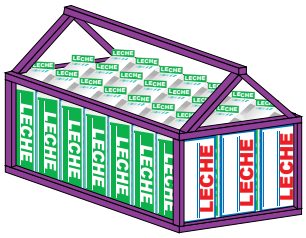

1 rebanada de queso


1 pan


1 rebandad de pan

Unidad compuesta de una fracción

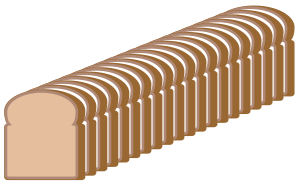
La unidad de una fracción es compuesta, cuando el conjunto de objetos que fraccionamos es mayor de 1.



21 litros de leche


6 sillas

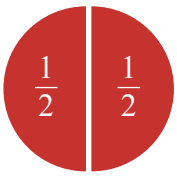

5 plátanos


20 rebanadas de pan

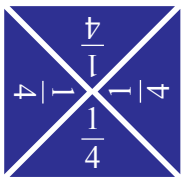
Notación de un número fraccionario

Para representar un número fraccionario, utilizamos una raya, a la que llamamos raya de quebrado. En la parte de arriba de la raya, el numerador, escribimos el número de partes que tomamos y en la parte de abajo, el denominador, el número de partes en las que fraccionamos la unidad.

$$\frac{\text{Número de partes que tomamos}}{\text{Número de partes en las que fraccionamos la unidad}} = \frac{\text{Numerador}}{\text{Denominador}}$$



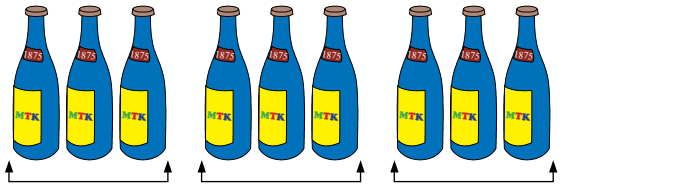
$\frac{1}{2}$ ← Una parte
De dos partes



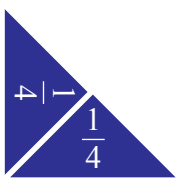
$\frac{1}{4}$ ← Una parte
De cuatro partes



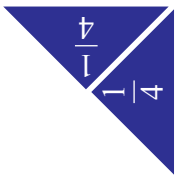
$\frac{1}{6}$ ← Una parte
De seis partes


$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ ← Una parte
De tres partes

De las fracciones que hemos hecho, podemos tomar varias de ellas y formar una nueva fracción.



$\frac{2}{4}$ ← Dos partes
$\frac{4}{4}$ ← De cuatro partes



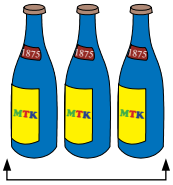
$\frac{2}{4}$ ← Dos partes
$\frac{4}{4}$ ← De cuatro partes



$\frac{2}{6}$ ← Dos partes
$\frac{6}{6}$ ← De seis partes



$\frac{4}{6}$ ← Cuatro partes
$\frac{6}{6}$ ← De seis partes



$\frac{1}{3}$ ← Una parte
$\frac{3}{3}$ ← De tres partes

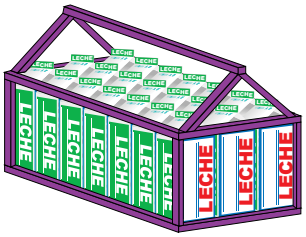


$\frac{2}{3}$ ← Dos partes
$\frac{3}{3}$ ← De tres partes

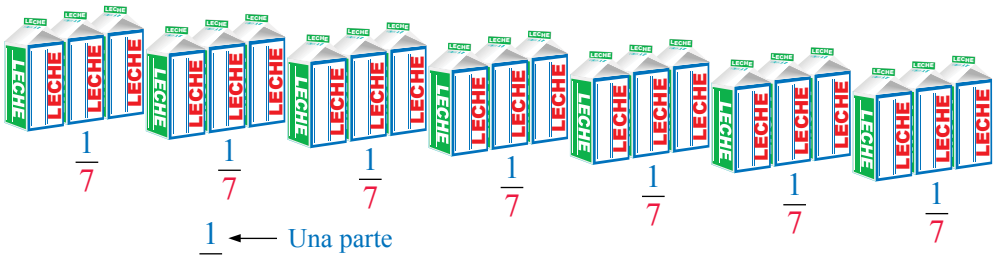
Ejemplo

Una caja de leche, contiene 21 litros. ¿Cuántos litros de leche son cinco séptimos de la caja?

Primero, fraccionamos la caja en siete partes iguales en tamaño, forma y cantidad.

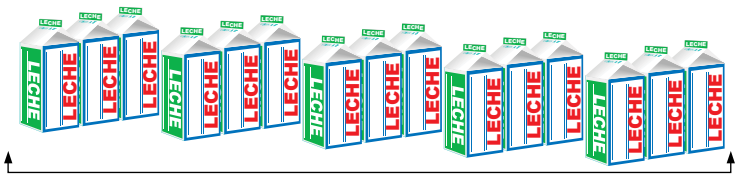


21 litros de leche



$\frac{1}{7}$ ← Una parte
$\frac{7}{7}$ ← De siete partes

Un séptimo de la caja son tres litros. Ahora, tomamos cinco séptimos y contamos los litros.



$\frac{5}{7}$ ← Cinco partes
$\frac{7}{7}$ ← De siete partes

$\frac{5}{7} = 15$ litros



$\frac{2}{7}$ ← Dos partes
$\frac{7}{7}$ ← De siete partes

$\frac{2}{7} = 6$ litros

Solución aritmética

Debido a que la unidad de la fracción es compuesta, para conocer el número de litros que un séptimo tiene, dividimos la unidad, es decir 21, entre siete.

Unidad compuesta → $\frac{21}{7} = 3$ litros → $\frac{1}{7} = 3$ litros
Número de partes en que fraccionamos la unidad →

Cada una de las siete fracciones, tiene 3 litros. Ahora, tomamos cinco de las siete partes en las cuales hemos fraccionado la unidad compuesta, es decir, multiplicamos por cinco.

$$\frac{5}{7} = 3 \times 5 = 15 \text{ litros}$$

La operación que hemos hecho, es equivalente a multiplicar por cinco los dos lados de la igualdad que obtuvimos.

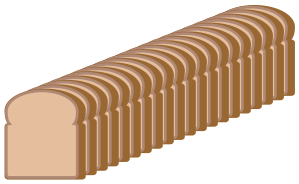
$$\frac{1}{7} = 3 \text{ litros} \longrightarrow 5 \times \frac{1}{7} = 5 \times 3 \longrightarrow \frac{5 \times 1}{7} = 15 \longrightarrow \frac{5}{7} = 15 \text{ litros}$$

Multiplicamos por 5
ambos lados de la igualdad

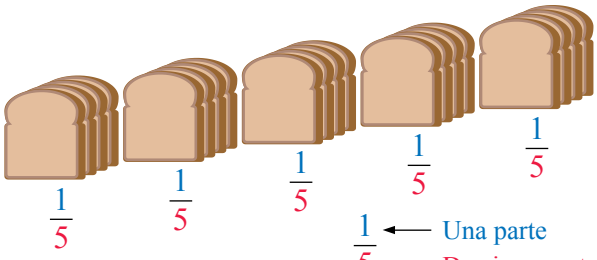
Ejemplo

Un pan tiene 20 rebanadas. ¿Cuántas rebanadas son tres quintos del pan?

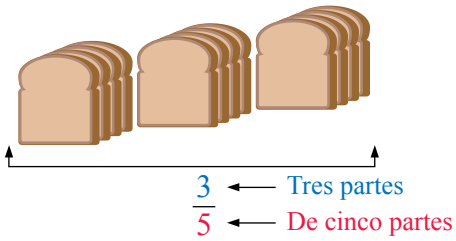
Primero, fraccionamos el pan en cinco partes iguales en tamaño, forma y cantidad.



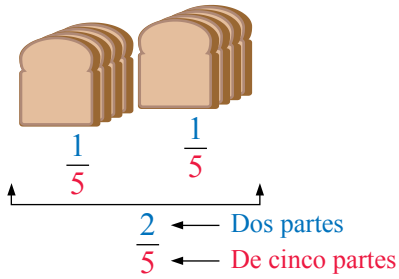
20 rebanadas de pan



Un quinto del pan son cuatro rebanadas. Ahora, tomamos tres quintos y contamos las rebanadas.



$\frac{3}{5} = 12$ rebanadas



$\frac{2}{5} = 8$ rebanadas

Solución aritmética

Debido a que la unidad de la fracción es compuesta, para conocer el número de rebanadas que un quinto tiene, dividimos la unidad, es decir 20, entre cinco.

Unidad compuesta → $\frac{20}{5} = 4$ rebanadas → $\frac{1}{5} = 4$ rebanadas

Número de partes en que fraccionamos la unidad →

Cada una de las cinco fracciones, tiene 4 rebanadas. Ahora, tomamos tres de las cinco partes en las cuales hemos fraccionado la unidad compuesta, es decir, multiplicamos por tres.

$$\frac{3}{5} = 3 \times 4 = 12 \text{ rebanadas}$$

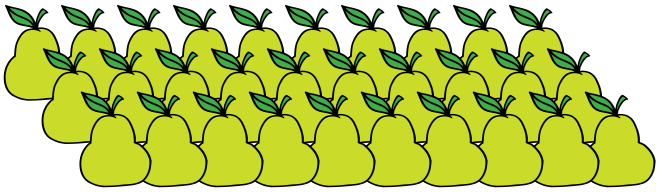
La operación que hemos hecho, es equivalente a multiplicar por tres los dos lados de la igualdad que obtuvimos.

$\frac{1}{5}$ = 4 rebanadas $\longrightarrow$ $3 \times \frac{1}{5} = 3 \times 4$ $\longrightarrow$ $\frac{3 \times 1}{5} = 12$ $\longrightarrow$ $\frac{3}{5}$ = 12 rebanadas

Multiplicamos por 3 ambos lados de la igualdad

Ejercicio

Una caja tiene 30 peras. ¿Cuántas peras tiene cuatro sextos de la caja? Primero, realiza la solución con un dibujo y después la solución aritmética.



Solución con un dibujo

$\frac{4}{6} =$ $\frac{2}{6} =$

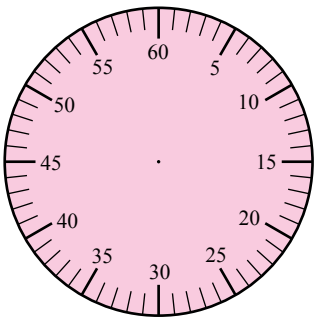
Solución aritmética

$\frac{4}{6} =$

Ejercicio

¿Cuántos minutos son siete décimos de hora? Primero, realiza la solución con un dibujo y después la solución aritmética.

Solución con un dibujo



$\frac{7}{10} =$

$\frac{3}{10} =$

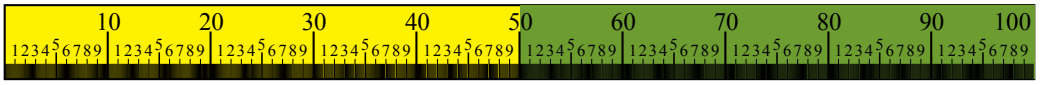
Solución aritmética

$\frac{7}{10} =$

Ejercicio

Tomamos medio metro como unidad compuesta ¿Cuántos centímetros son seis décimos de medio metro? Primero, realiza la solución con un dibujo y después la solución aritmética.

Solución con un dibujo



1 metro

$$\frac{6}{10} = \qquad\qquad \frac{4}{10} =$$

Solución aritmética

$$\frac{6}{10} =$$

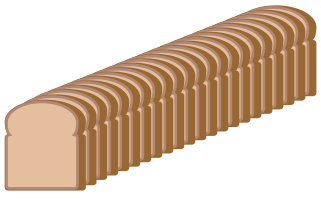
Notación de fracción mixta

En algunas ocasiones, al fraccionar una unidad compuesta, tenemos un residuo, es decir, partes que a su vez tenemos que fraccionar para poder distribuirlas de tal forma, que permitan que todas las fracciones formadas sean iguales en tamaño, forma y cantidad. Para expresar este tipo de fracciones, utilizamos la notación de fracción mixta.

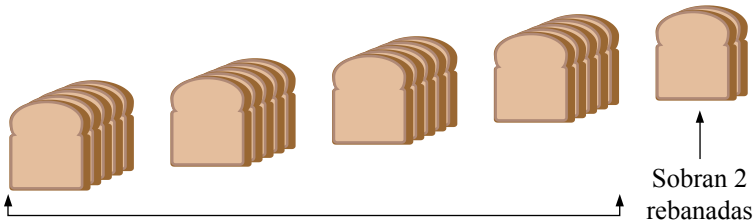
Ejemplo

Un pan tiene 22 rebanadas. ¿Cuántas rebanadas son tres cuartos del pan?

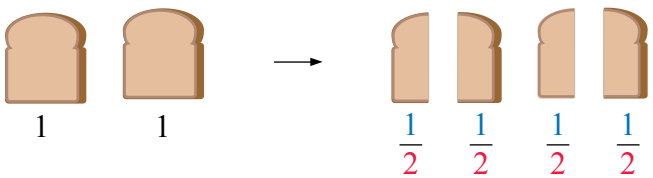
Primero, fraccionamos el pan en cuatro partes iguales en tamaño, forma y cantidad.



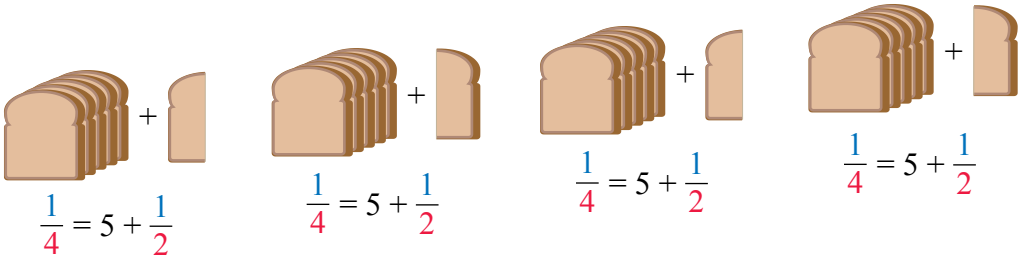
22 rebanadas de pan



Sobran 2 rebanadas. Cada una de estas 2 rebanadas, es una unidad simple. Si las fraccionamos en 2 partes iguales, podemos colocar cada parte en cada una de las fracciones que formamos de la unidad compuesta.



Formamos las cuatro fracciones que son iguales en tamaño, forma y cantidad. Cada una de las fracciones, es una combinación de 5 rebanadas, que ahora son unidades simples y un medio de rebanada que es una fracción de esta unidad simple. El resultado lo expresamos en notación de fracción mixta, es decir, la combinación de unidades simples y fracciones.



$\frac{1}{4} = 5 + \frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{4} = 5 + \frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{4} = 5 + \frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{4} = 5 + \frac{1}{2}$

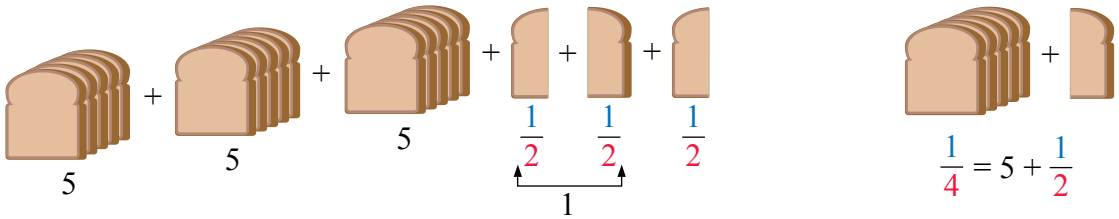
Unidad compuesta → $\frac{1}{4} = 5 + \frac{1}{2}$ ← Fracción de la unidad simple

Fracción del pan completo ↑ $\quad$ ↑ Unidad simple

$$\frac{1}{4} \text{ del pan completo} = 5 \text{ rebanadas} + \frac{1}{2} \text{ rebanada}$$

Notación de fracción mixta

Ahora que hemos fraccionado el pan en cuatro partes iguales en tamaño, forma y cantidad, tomamos tres partes, para determinar cuántas rebanadas y fracción de rebanada tiene tres cuartos.



5 $\quad$ 5 $\quad$ 5 $\quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{4} = 5 + \frac{1}{2}$

1

$$\frac{3}{4} = 16 + \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{4} \text{ del pan completo} = 16 \text{ rebanadas} + \frac{1}{2} \text{ rebanada}$$

Notación de fracción mixta

En matemáticas para que las expresiones sean lo más compactas posibles, las escribimos en forma abreviada. Por lo cual, las fracciones mixtas las podemos expresar de dos formas diferentes: con el símbolo de suma o en forma compacta.

$5 + \frac{1}{2} = 5\frac{1}{2}$ $\quad \longrightarrow \quad$ $16 + \frac{1}{2} = 16\frac{1}{2}$

Forma compacta $\quad$ Forma compacta

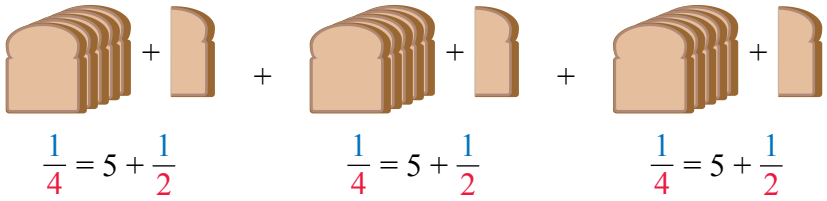
Solución aritmética

Para conocer el número de rebanadas y la fracción de rebanada que un cuarto tiene, dividimos la unidad, es decir 22, entre cuatro. Simplificamos el resultado.

$$\begin{array}{r|l} & 5 \\ 4 & 22 \\ -20 & \\ \hline & 2 \end{array} \longrightarrow 5 + \frac{2}{4} = 5 + \frac{1}{2} = 5\frac{1}{2} \longrightarrow \frac{22}{4} = 5\frac{1}{2} \text{ rebanadas} \longrightarrow \frac{1}{4} = 5\frac{1}{2} \text{ rebanadas}$$

Cada una de las cuatro fracciones, tiene 5 rebanadas más la mitad de una rebanada. Ahora, tomamos tres de las cuatro partes en las cuales hemos fraccionado la unidad compuesta, es decir, multiplicamos por tres.

Como se trata de una fracción compuesta, multiplicamos por tres, la parte entera y la fraccionaria. Para ilustrar la multiplicación, en un dibujo, vamos a sumar tres veces la misma cantidad.

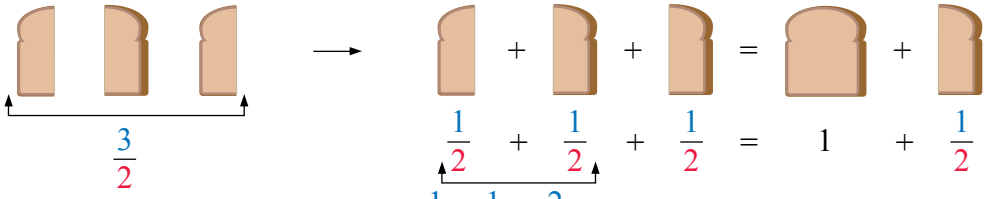


$$\frac{1}{4} = 5 + \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{4} = 5 + \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{4} = 5 + \frac{1}{2}$$

$$3 \times \frac{1}{4} = 3 \times 5 + 3 \times \frac{1}{2} \longrightarrow \frac{3 \times 1}{4} = 3 \times 5 + \frac{3 \times 1}{2} \longrightarrow \frac{3}{4} = 15 + \frac{3}{2}$$

Multiplicamos por 3
la parte entera y la parte fraccionaria

Como podemos observar en la figura anterior, tres medios de rebanada, también lo podemos expresar como una fracción mixta, ya que está formada de una parte entera y una fraccionaria. Como se ilustra en la figura.



$$\frac{3}{2} \longrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

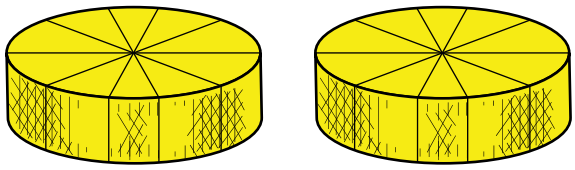
Obtenemos el resultado, en forma simplificada.

$$\frac{3}{4} = 15 + \frac{3}{2} \longrightarrow \frac{3}{4} = 15 + \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = 15 + 1 + \frac{1}{2} = 16 + \frac{1}{2} = 16\frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{4} \text{ del pan completo} = 16 \text{ rebanadas} + \frac{1}{2} \text{ rebanada}$$

Ejemplo

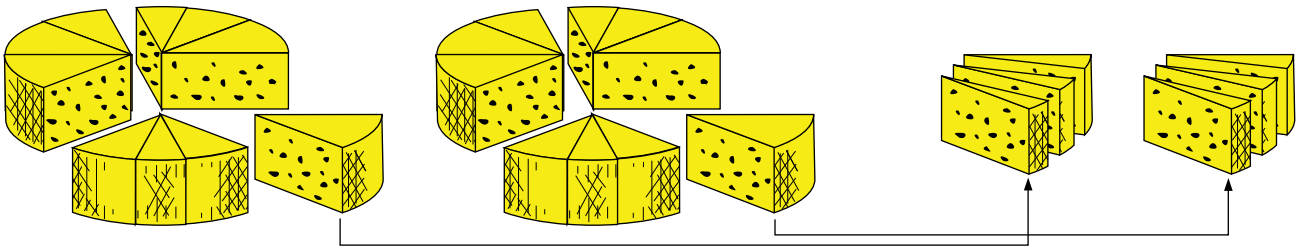
Tenemos dos quesos. Cada uno está dividido en diez rebanadas. Cada rebanada cuesta $6.00. Lolita compra cuatro sextos de las rebanadas. ¿Cuánto paga?



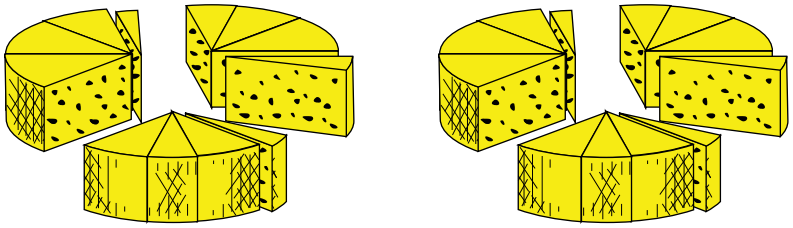
$6.00 cada rebanada

Solución con un dibujo
Fraccionamos las rebanadas de los dos quesos en seis partes iguales en tamaño, forma y cantidad.

Al dividir los quesos en seis partes iguales, sobran dos rebanadas. Para que todas las fracciones sean iguales, fraccionamos las dos rebanadas que sobran en tres partes iguales cada una, para tener seis tercios de rebanada.

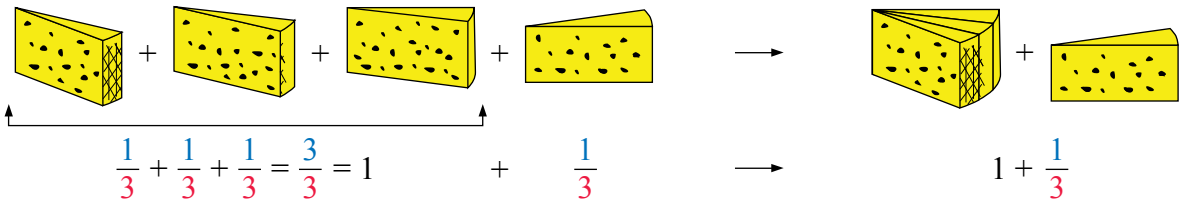


Colocamos un tercio de rebanada en cada una de las seis fracciones.



$\frac{1}{6}$ de las rebanadas de queso = 3 rebanadas + $\frac{1}{3}$ rebanada

Tomamos cuatro sextos de las rebanadas y las contamos.



Obtenemos el resultado, en forma simplificada.

$$\frac{4}{6} = 12 + \frac{4}{3} \longrightarrow \frac{4}{6} = 12 + \frac{3}{3} + \frac{1}{3} = 12 + 1 + \frac{1}{3} = 13 + \frac{1}{3} = 13\frac{1}{3}$$

$\frac{4}{6}$ de las rebanadas de los dos quesos = 13 rebanadas + $\frac{1}{3}$ rebanada

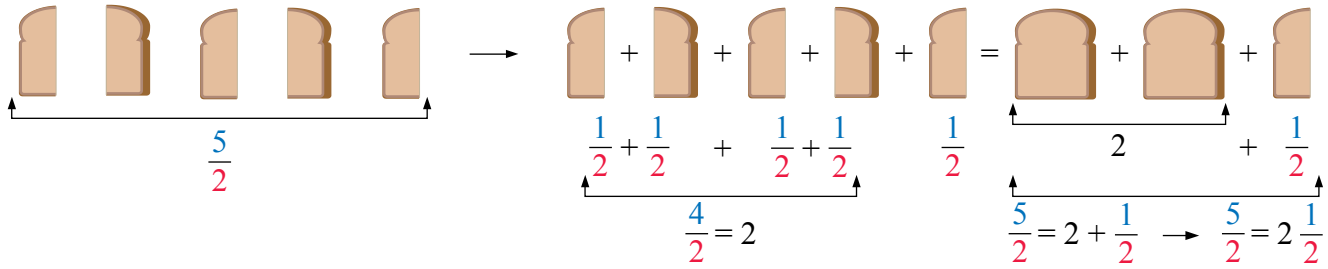
Fracciones impropias

Cuando el numerador de una fracción es mayor que su denominador, la llamamos fracción impropia. Todas las fracciones impropias, están compuestas de una parte entera y una parte fraccionaria, por lo cual, se pueden expresar como fracciones mixtas.

Ejemplo

Expresar como fracción mixta, cinco medios de rebanadas de pan.

Solución con un dibujo



Cuatro medios hacen dos enteros y sobra un medio.

Solución aritmética

El denominador indica que el número de partes en las cuales hemos fraccionado la unidad es dos. Expresamos la fracción impropia, como la suma de dos fracciones, una que representa la parte entera de la fracción mixta y la otra la parte fraccionaria. Cada rebanada de pan la hemos dividido en dos, por lo cual, tomamos cuatro mitades para formar la parte entera.

$$\frac{5}{2} = \frac{4}{2} + \frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2}$$

Mentalmente calculamos, la forma en la cual debemos expresar la fracción como la suma de dos fracciones. Tomamos en cuenta, cuál es el número máximo de unidades que podemos formar.

Ejemplo

Una caja de leche contiene 21 litros, y cuesta $252.00. Vendemos ocho tercios del total de litros que tiene la tienda. Una caja completa de leche son tres tercios. ¿Cuántas cajas completas vendimos y cuántos litros no se vendieron de la última caja? ¿Cuánto dinero cobramos?

Números racionales

A los números fraccionarios, también les llamamos números racionales, ya que, son la razón del numerador con el denominador. Razón es lo mismo que relación, es decir, relacionan el numerador con el denominador.

4 de 15 $\left[\frac{4}{15}\right]$ Razón o relación del numerador con el denominador

Números irracionales

Los números irracionales, son muy especiales, ya que, solamente pueden ser expresados en notación decimal. No se pueden expresar como la razón o relación de dos números enteros, es decir, como números racionales o fraccionarios.

Los números irracionales, están compuestos de una parte entera y una parte decimal. La parte decimal es infinita, es decir, podemos continuar escribiendo decimales y nunca terminar, siempre encontramos uno más. Lo números que forman la parte decimal, no se repiten.

El número irracional más famoso es el número π, el que usamos para calcular el perímetro y el área de un círculo.

$\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419716933993751 \ldots$

Parte entera — Parte decimal

La raíz cuadrada de algunos números, también son números irracionales. Por ejemplo, la raíz cuadrada de 2, de 5, de 7, etcétera.

$\sqrt{2} = 1.4142135623731 \ldots$ (Parte entera — Parte decimal)

$\sqrt{5} = 2.23606797749979 \ldots$ (Parte entera — Parte decimal)

$\sqrt{7} = 2.64575131106459 \ldots$ (Parte entera — Parte decimal)

Clasificación de los números

El cero

Los números naturales, representan objetos o dimensiones. Cuando queremos indicar que no hay ningún objeto o no existe ninguna dimensión, entonces, utilizamos el cero.

Números naturales

Los números naturales, al igual que el cero, son creación del ser humano y surgen de la experiencia que tenemos, al contemplar la naturaleza. Son una forma de representar o imaginarnos con símbolos la naturaleza.

Números enteros

A todos los números naturales y al número cero, les llamamos números enteros.

Números fraccionarios o racionales

Son los números que utilizando la división, expresan la razón o relación entre dos números enteros.

Números irracionales

Los números irracionales, son muy especiales, ya que, solamente pueden ser expresados en notación decimal. No se pueden expresar como la razón o relación de dos números enteros, es decir, como números racionales o fraccionarios.

Números reales positivos

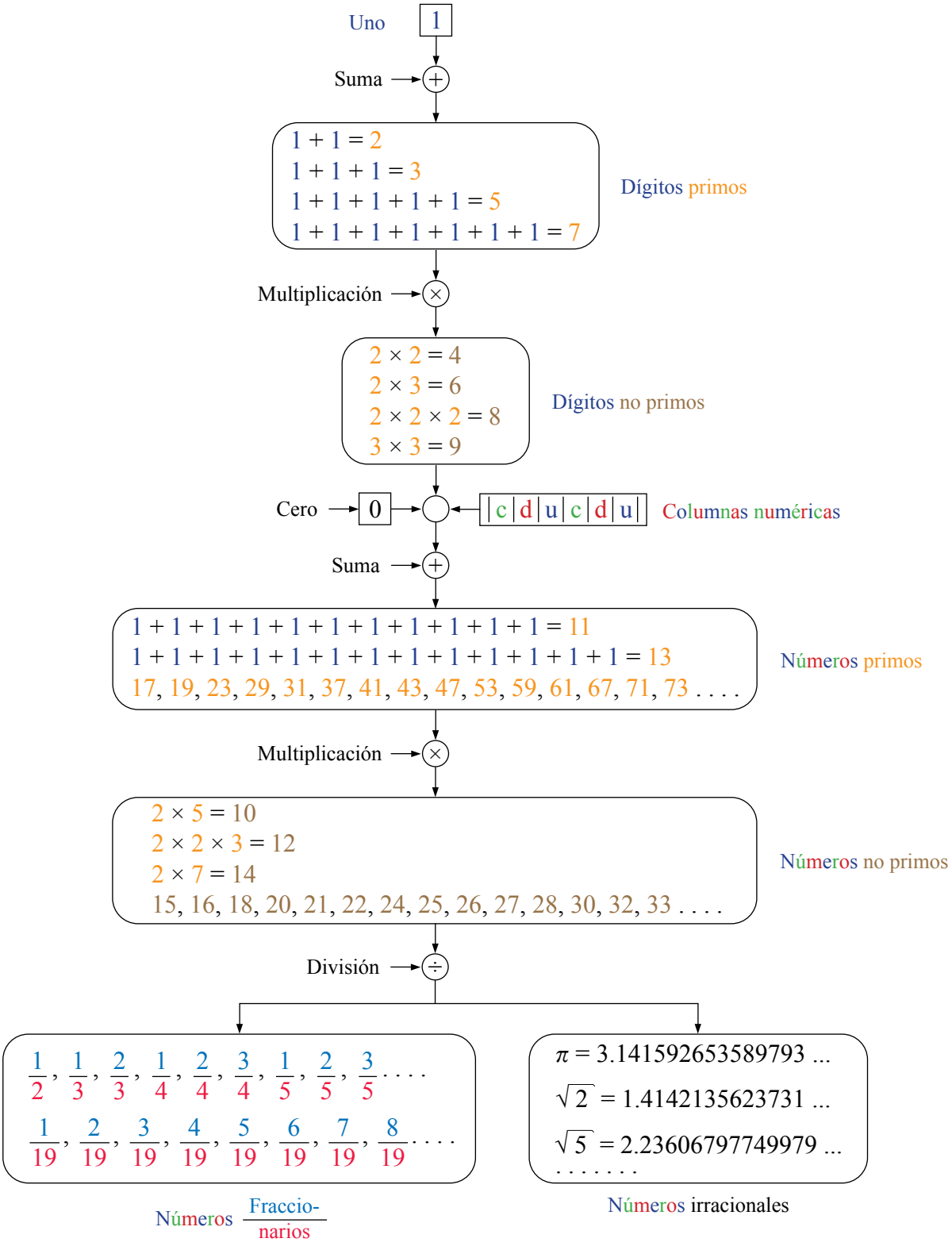
Al conjunto de los números formado por los números enteros, los números fraccionarios y los números irracionales, lo llamamos el conjunto de los números reales positivos.

Decimos que son reales positivos, porque todos los números naturales, también los podemos escribir poniéndoles un signo de más, para indicar que pueden ser sumados a otro número natural.

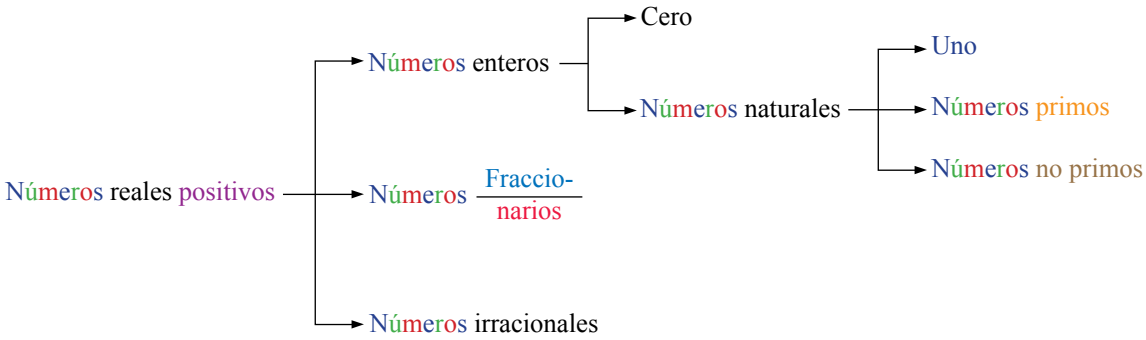
$1 = +1, 2 = +2, 3 = +3, 4 = +4, 5 = +5, 6 = +6, 7 = +7 \ldots .$

Árbol genealógico de los números reales positivos

Utilizando la división, completamos el árbol genealógico que construimos al estudiar los números naturales.



Clasificación de los números reales positivos



Ejemplo

Clasificar los números.

$0 \longrightarrow$ Número real positivo, entero

$1 \longrightarrow$ Número real positivo, entero, natural

$36 \longrightarrow$ Número real positivo, entero, natural, no primo

$53 \longrightarrow$ Número real positivo, entero, natural, primo

$\frac{3}{14} \longrightarrow$ Número real positivo, fraccionario

$3.141592 \longrightarrow$ Número real positivo, irracional

Ejercicio

Clasifica los números.

$71 \longrightarrow$

$21 \longrightarrow$

$\sqrt{2} = 1.4142 \longrightarrow$

$17 \longrightarrow$

$\frac{17}{18} \longrightarrow$

$\sqrt{7} = 2.6457 \longrightarrow$

$113 \longrightarrow$

$2{,}253 \longrightarrow$

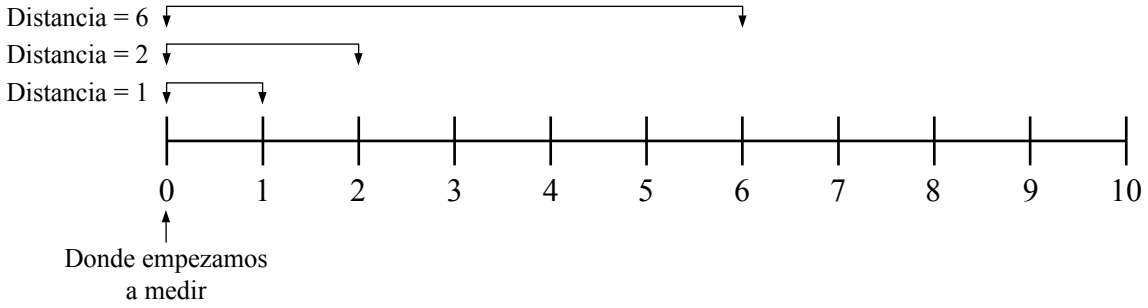
$\frac{247}{94} \longrightarrow$

$\pi = 3.14159 \longrightarrow$

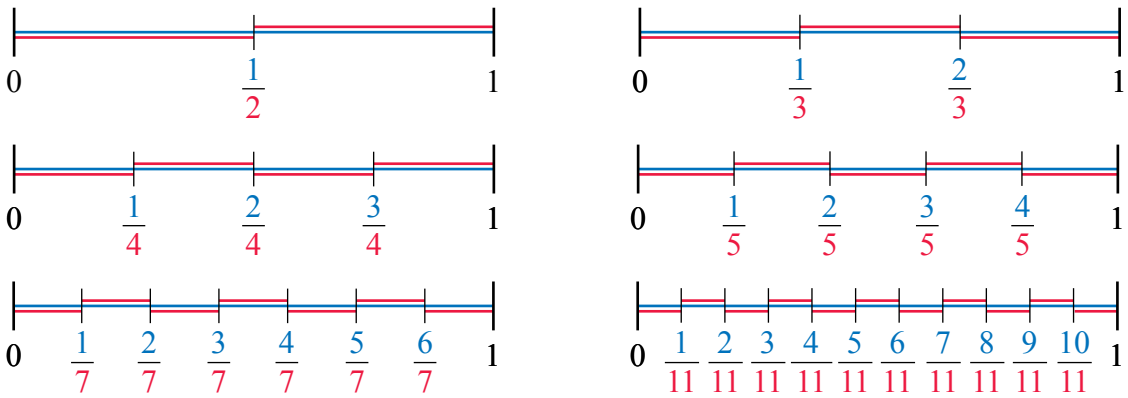
La recta de los números reales positivos

Los números también representan una distancia

Los números, no solamente representan objetos de la naturaleza, también representan distancias o longitudes, por lo cual, los podemos localizar en una recta. El cero, significa que no hay ninguna longitud, por lo tanto, la recta en la cual localizamos los números, empieza en cero, es decir, donde empezamos a medir.



También los números fraccionarios representan una distancia. Tomamos la unidad, es decir, la distancia entre 0 y 1 y la fraccionamos en tantas partes como el denominador indique.

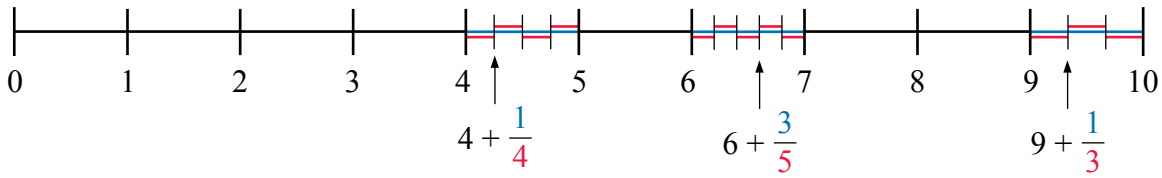


Para localizar una fracción impropia en la recta de los números reales, primero, si es posible, simplificamos la fracción, la expresamos en notación mixta, contamos en la recta el número de unidades que la forman y fraccionamos la unidad correspondiente.

Ejemplo

Localizar en la recta de los números reales, las fracciones impropias.

$\frac{17}{4} = \frac{16}{4} + \frac{1}{4} = 4 + \frac{1}{4}$ $\quad \frac{33}{5} = \frac{30}{5} + \frac{3}{5} = 6 + \frac{3}{5}$ $\quad \frac{\cancel{56}^{28}}{\cancel{6}_{3}} = \frac{28}{3} = \frac{27}{3} + \frac{1}{3} = 9 + \frac{1}{3}$



$4 + \frac{1}{4}$ $\quad 6 + \frac{3}{5}$ $\quad 9 + \frac{1}{3}$

Ejercicio

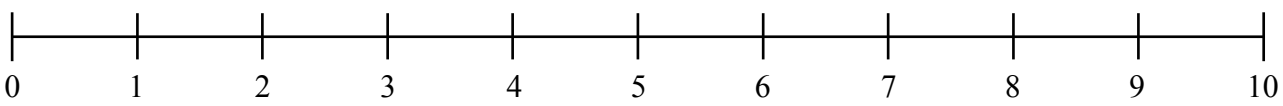
Localiza en la recta de los números reales, las fracciones impropias.

$\frac{23}{3} =$ $\qquad \frac{35}{10} =$

$\frac{42}{24} =$ $\qquad \frac{56}{6} =$

$\frac{28}{5} =$ $\qquad \frac{66}{8} =$

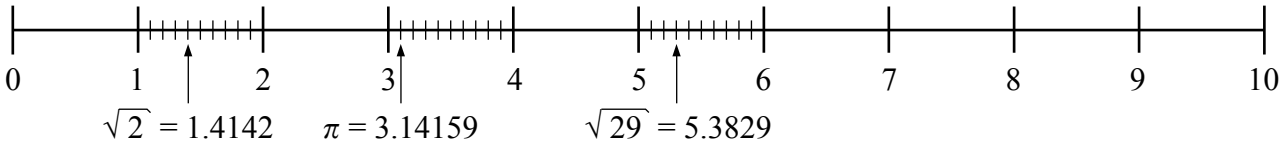
$\frac{58}{12} =$ $\qquad \frac{64}{10} =$



Los números irracionales no se pueden localizar en la recta de los números

Los números irracionales, no se pueden expresar en forma de fracción, por lo que, no es posible localizarlos en forma exacta en la recta de los números.

Si necesitamos localizar números irracionales en la recta de los números reales, lo hacemos en forma aproximada. Dividimos la unidad en diez partes y utilizando únicamente el valor del primer decimal, los localizamos.



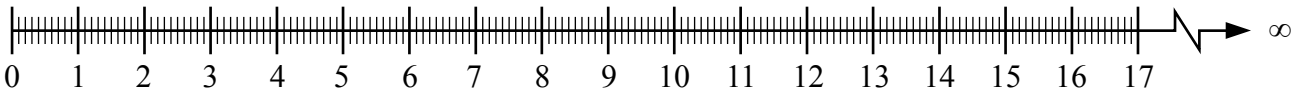
La recta de los números reales positivos

La recta de los números reales positivos, empieza en cero y crece sin límite, es decir, podemos seguir añadiendo números y nunca terminar. En lenguaje matemático, decimos que tiende a infinito.

Infinito es como una meta a la cual nunca llegamos, caminamos y seguimos caminando y nunca la alcanzamos, por eso, decimos que tendemos a infinito, es decir, hacia allá caminamos pero nunca llegamos.

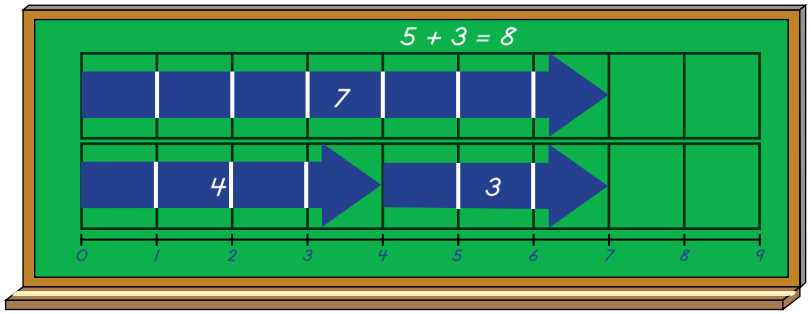
En matemáticas, tender, es decir, caminar hacia un número sin nunca alcanzarlo, se representa con una flecha. Infinito se representa con un símbolo que parece un 8 acostado ∞. Tender a infinito se representa como: $\rightarrow \infty$.

La recta de los números reales positivos, la dibujamos la siguiente manera:

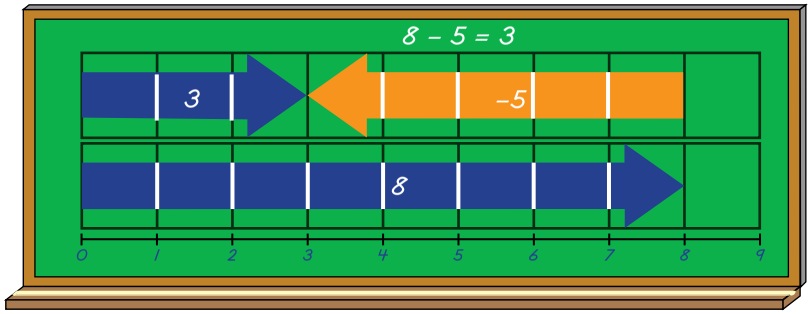


Material Didáctico

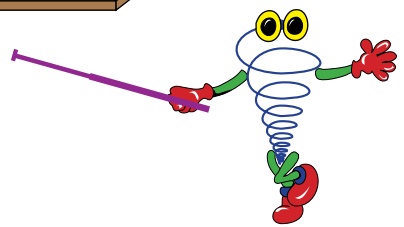
La Recta de la Números Cartulina 1

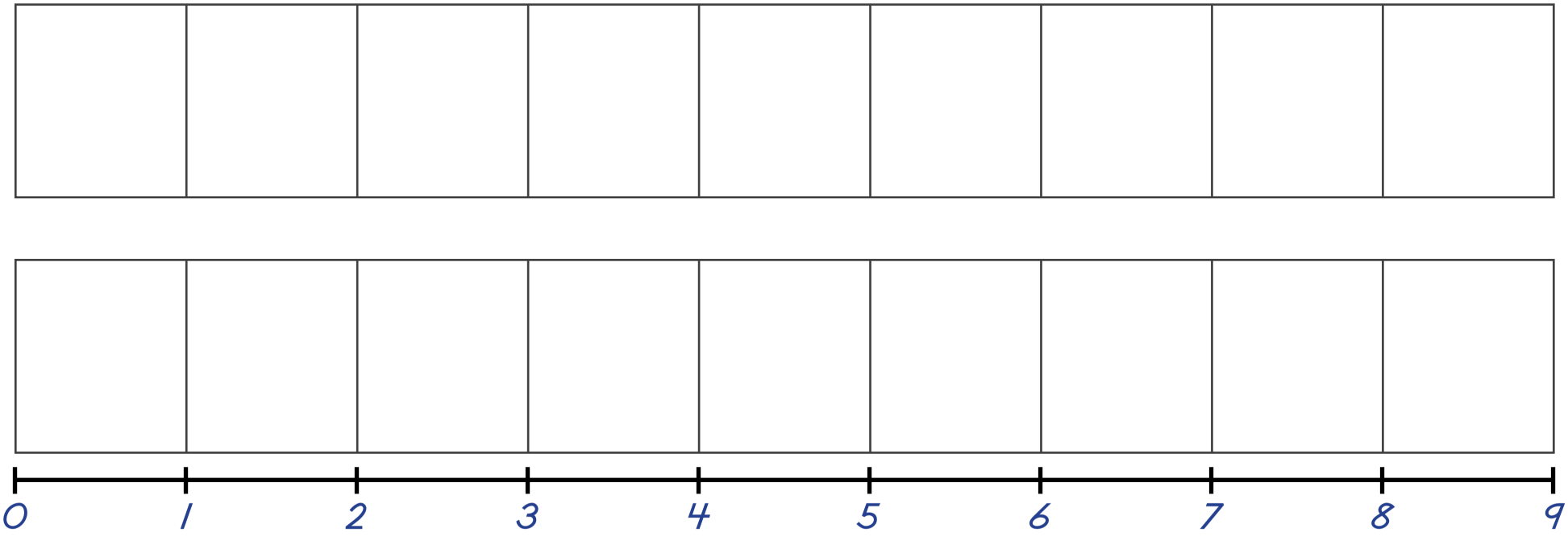


Suma

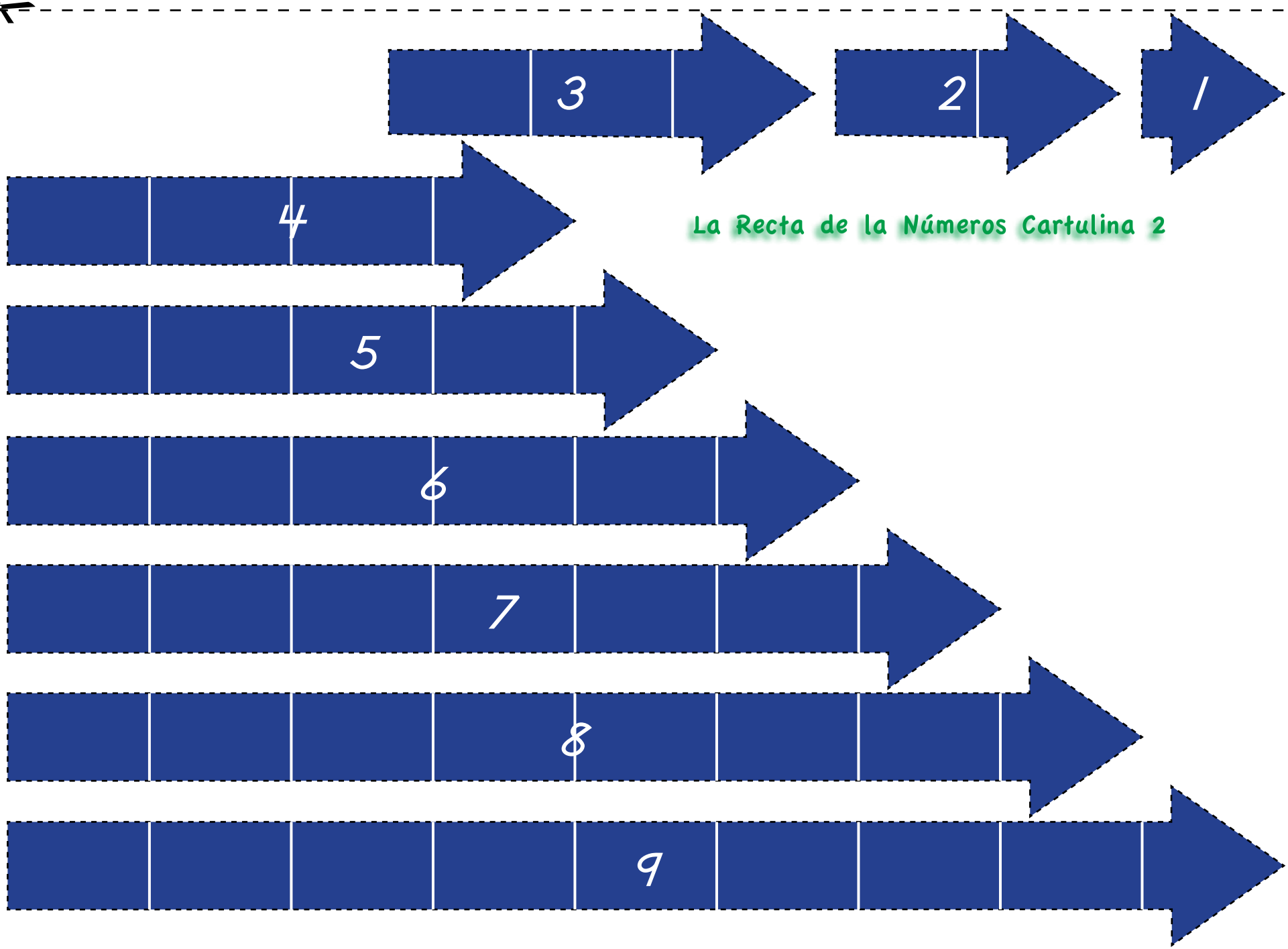


Resta





La Recta de los Números



La Recta de la Números Cartulina 2

La Recta de la Números Cartulina 3

−1

−2

−3

−4

−5

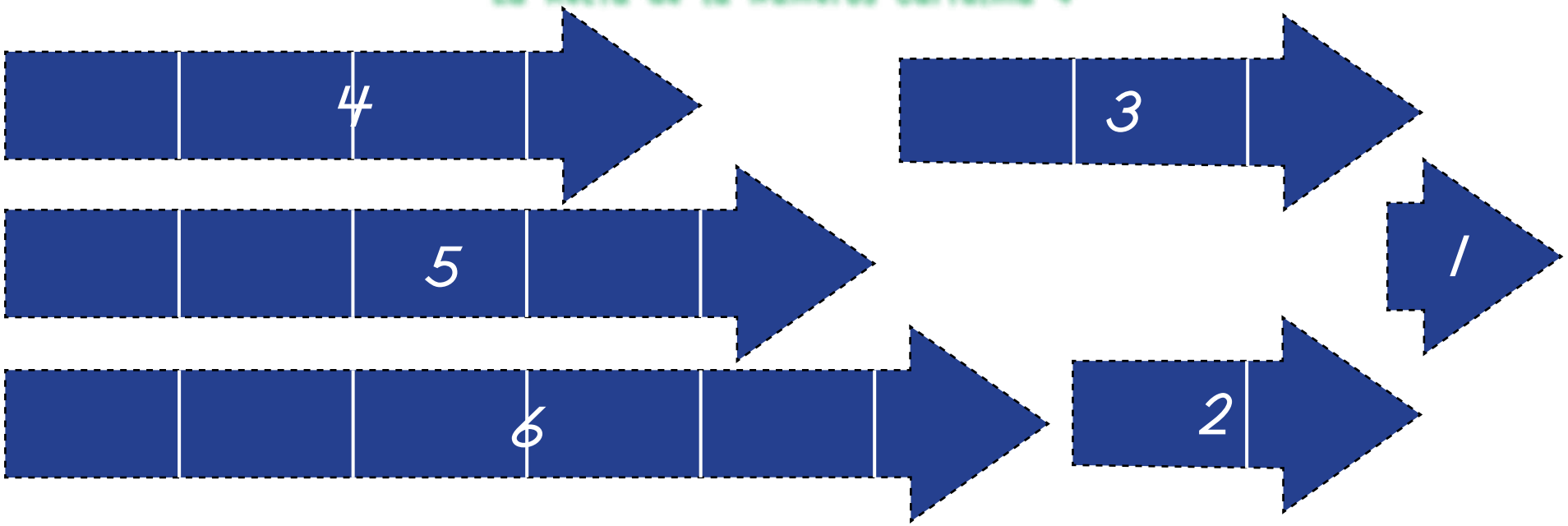
−6

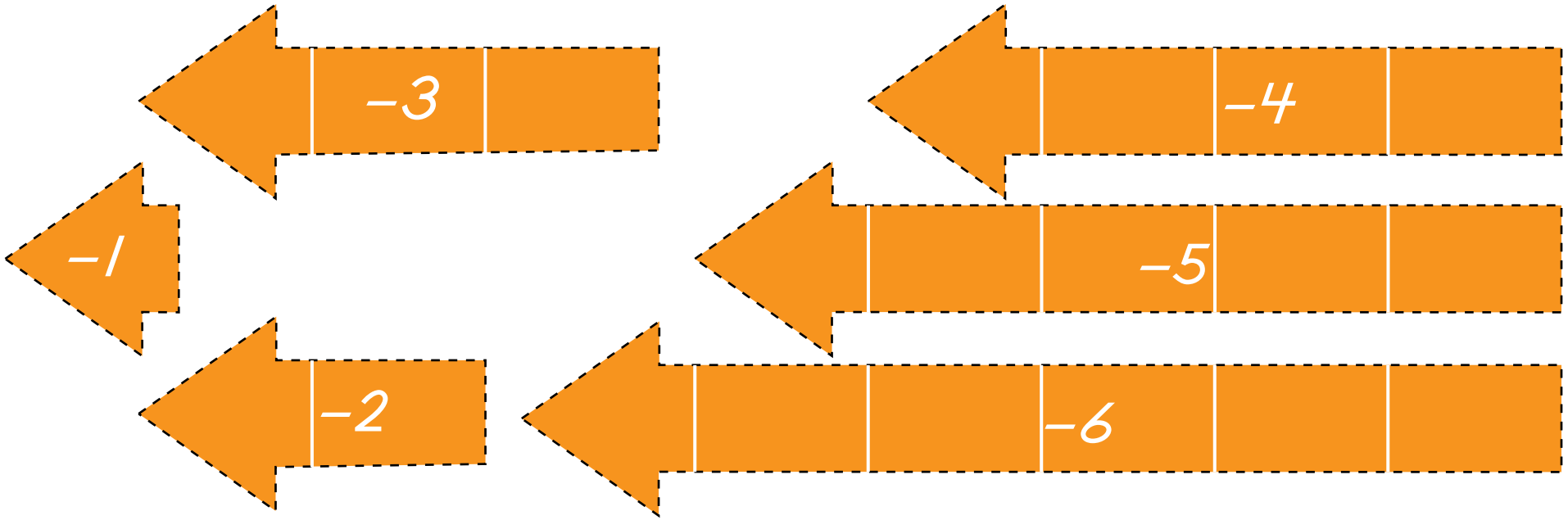
−7

−8

−9

La Recta de la Números Cartulina 4

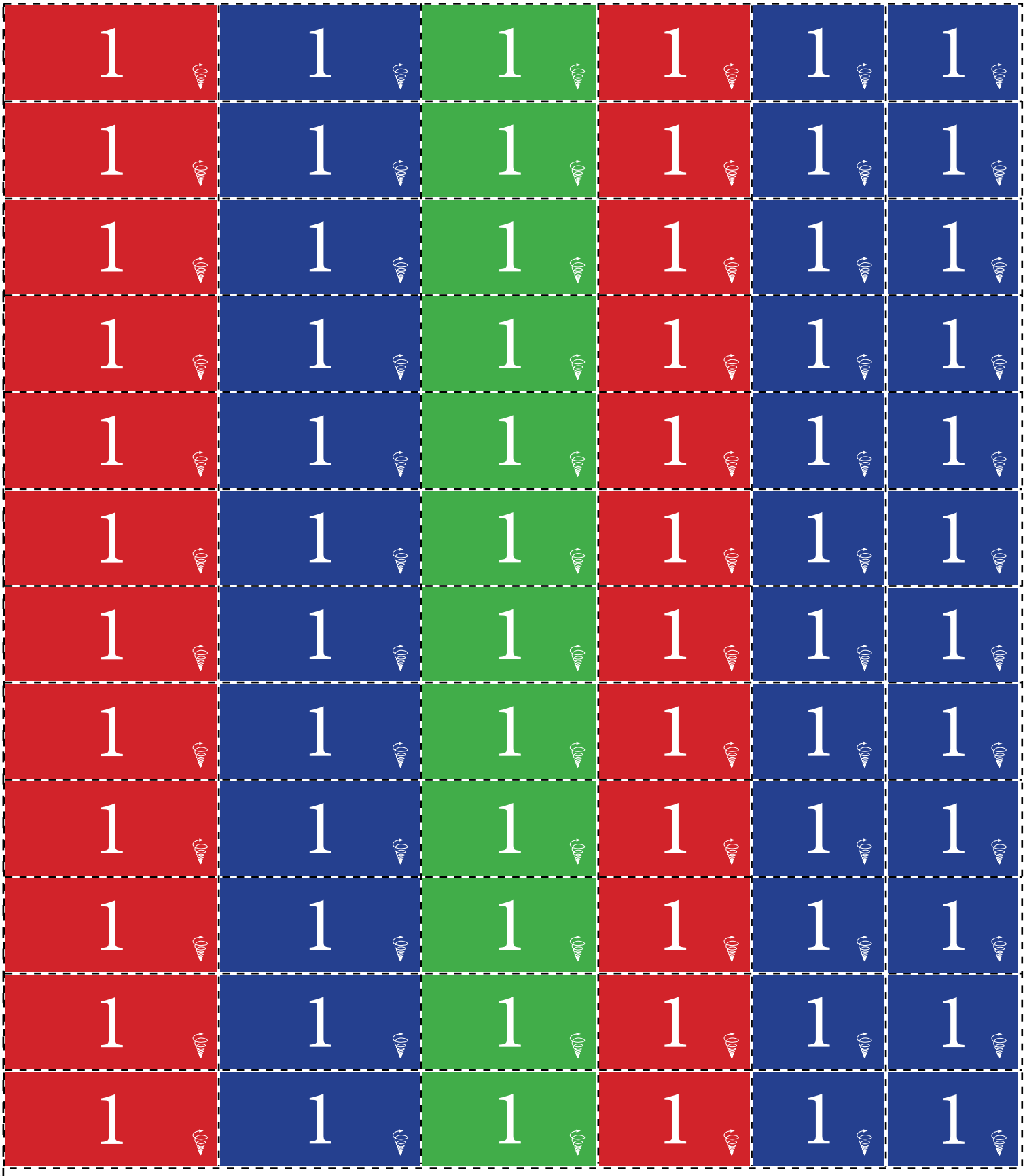




Las Columnas Numéricas

Decenas de Millar	Unidades de Millar	Centenas	Decenas	Unidades

Las Columnas Numéricas



Las Columnas Numéricas

1	1	10	100	1,000	10,000
1	1	10	100	1,000	10,000
1	1	10	100	1,000	10,000
1	1	10	100	1,000	10,000
1	1	10	100	1,000	10,000
1	1	10	100	1,000	10,000
1	1	10	100	1,000	10,000
1	1	10	100	1,000	10,000
1	1	10	100	1,000	10,000
1	1	10	100	1,000	10,000
1	1	10	100	1,000	10,000
1	1	10	100	1,000	10,000
1	1	10	100	1,000	10,000