Capítulo 1

Las Cuatro Dimensiones de los Números

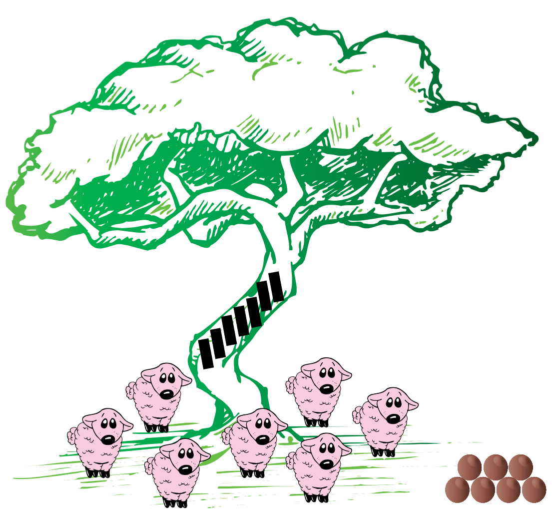
Dinámica Básica del Sistema de Numeración Decimal

Los Números Tienen Vida Propia

Breve Historia de los Números Naturales

Primer concepto de número

Comparar los objetos que se intercambian con símbolos o con piedras, es el antecedente de contar y sumar.
Para saber si la cantidad de borregos que en la mañana salen a pastar, es la misma que regresa en la tarde, nuestros antepasados hacían marcas en un pedazo de madera, o acumulaban piedras. Cada marca o cada piedra correspondía a un animal. Al regresar los borregos los comparan uno a uno con las marcas o las piedras.



Por experimentos que se han realizado con animales y con bebés, sabemos que es posible reconocer hasta cuatro objetos sin contar. El animal, el bebé e incluso los adultos, al ver tres objetos sabe que falta uno, ya que reconoce que eran cuatro, pero si el número de objetos es mayor a cuatro, ya no reconoce cuántos objetos faltan o sobran.

De esta primitiva manera de comparar objetos de conjuntos, surge el número que nos permite identificar un conjunto de objetos, sin necesidad de hacer una comparación uno a uno de dos conjuntos.

I	II	III	IIII	~~IIII~~
Uno	**Dos**	**Tres**	**Cuatro**	**Cinco**

Al número de rayas o piedras le asignaron un nombre. No sabemos en que tiempo sucedió, pero este nombre asociado al conjunto paso a ser un adjetivo calificativo. Ahora era ya posible decir: *ocho* perros.

La escuela Pitagórica

En el siglo VI bc, la escuela Pitagórica, descubrió que los números naturales tienen vida por ellos mismos. Los números se usan para contar, pero lo importante es descubrir la naturaleza del número.

Pitágoras da al número una categoría similar a los dioses. El número es el primer principio, no es posible definirlo y en él están contenidos todos los números.

El número es sagrado, ya que en él está contenido toda la sabiduría humana. El número es tan incomprensible como los dioses.

La hermandad formada por Pitágoras, era una colección de familias. Las mujeres eran también estudiosas de los números.

Los números Pitagóricos son los números naturales.

Los números son el símbolo secreto de la realidad en la que vivimos.

Algunos números Pitagórica y su significado

1 Lo llamaron monad que significa *unidad*. Es el *generador* de todos los números, por lo tanto el *más importante*. Representa la *razón*.

2 Lo llamaron dyad y representa la diversidad de opinión. Es el primer número *femenino*.

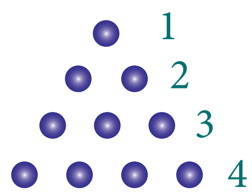
3 Lo llamaron triad y representa la *harmonía*. Es la suma de 1, que es la unidad y 2 que representa la diversidad, por lo cual, constituye la harmonía. Es el primer número *masculino*. Si tomamos a la mujer, número 2 y le añadimos razón, número 1, obtenemos al hombre.

4 Lo llamaron *cuadro*, ya que cuatro puntos son los vértices de un cuadrado. Representa la *justicia*.

5 Representa el *matrimonio*, ya que la mujer, número 2 y el hombre número 3, forman el matrimonio.

6 Representa la *creación*. La mujer, número 2, el hombre, número 3 y el 1 que es el fruto del hombre y la mujer, el niño, representan la *creación*.

10 Lo llamaron *tetractys*. Es el número más importante y más sagrado. Representa los cuatros elementos del universo: fuego, tierra, agua y aire. Geométricamente lo representaban con diez puntos, acomodados como un triángulo equilátero, donde todos los lados son iguales.



1 + 2 + 3 + 4 = 10

Los Pitagóricos estudiaron la *Relación de Oro*. Involucra dos números tales que: la razón de la suma de los números al más grande es igual a la razón del más grande al más pequeño.

$$a > b$$

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \qquad \text{Si } b = 1 \qquad \rightarrow \qquad \frac{a+1}{a} = \frac{a}{1}$$

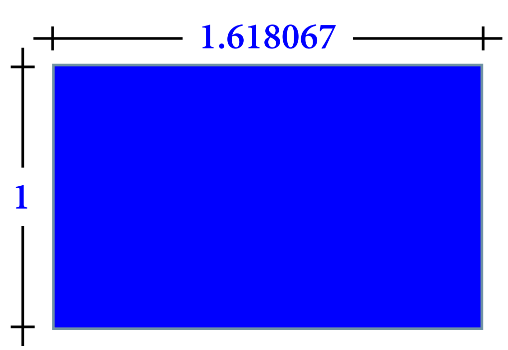
$$a+1 = a^2 \qquad \rightarrow \qquad a^2 - a - 1 = 0$$

$$a = \frac{-(-1)+\sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = 1.6180679778$$

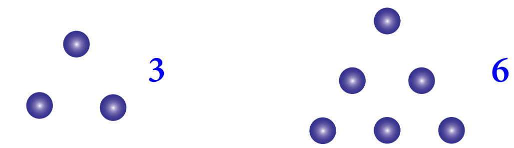
$$\frac{a+b}{a} = \frac{1.6180679778+1}{1.6180679778} = 1.6180679778$$

$$\frac{a}{b} = \frac{1.6180679778}{1} = 1.6180679778$$

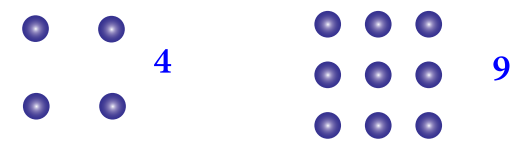


Números y figuras geométricas

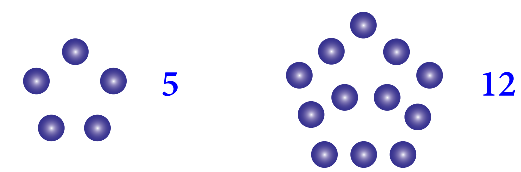
Números triangulares.
Con los puntos que el número representa, formamos triángulos equiláteros.



Números cuadrados perfectos.
Con los puntos que el número representa, formamos cuadrados.



Números pentagonales.



Números perfectos

La suma de todos los números que lo dividen en forma exacta, es el número.

6 Los números que dividen a 6 en forma exacta son:

1, 2, 3.

La suma de los números que dividen en forma exacta a 6 es:

1 + 2 + 3 = 6.

28 Los números que dividen a 28 en forma exacta son:

1, 2, 4, 7, 14.

La suma de los números que dividen en forma exacta a 6 es:

1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28.

Números amigables

La suma de todos los números que dividen es el otro número.

284 Los números que dividen a 284 son: 1, 2, 4, 71, 142.

1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220.

220 Los números que dividen a 220 son: 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110.

1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284.

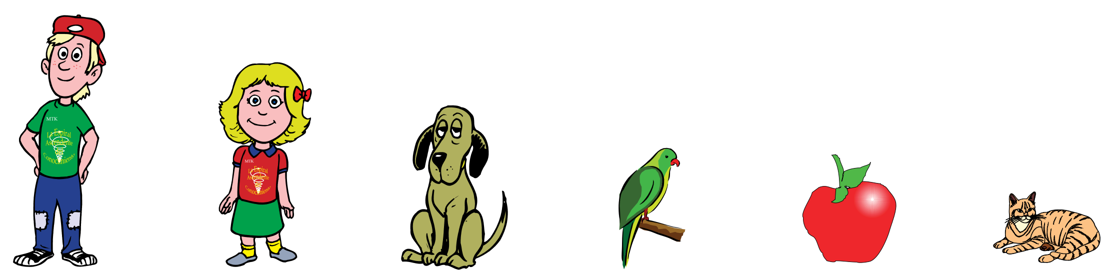
Las Cuatro Dimensiones de los Números

Primer Nivel de Abstracción

Los objetos de la naturaleza

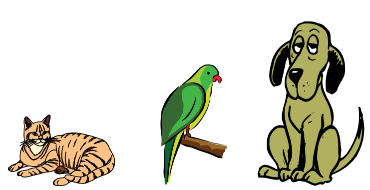
En el espacio que vivimos encontramos personas y diferentes objetos. Cosas creadas por la naturaleza, como son: el sol, los animales, plantas, frutas, etcétera. Objetos creados por nosotros, como por ejemplo: las canicas, los balones, los carros, los libros, etcétera.

Todas las personas, animales y objetos de la naturaleza tienen un nombre.

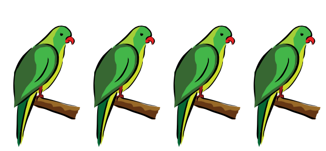


Niño. Niña. Perro. Perico. Manzana. Gato.

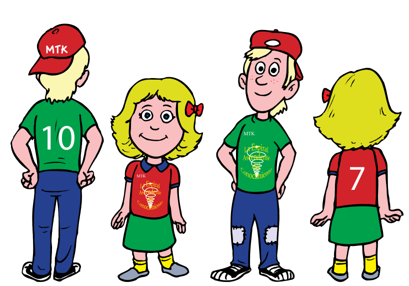
Para clasificar los objetos, los agrupamos en conjuntos.



Conjunto de animales.



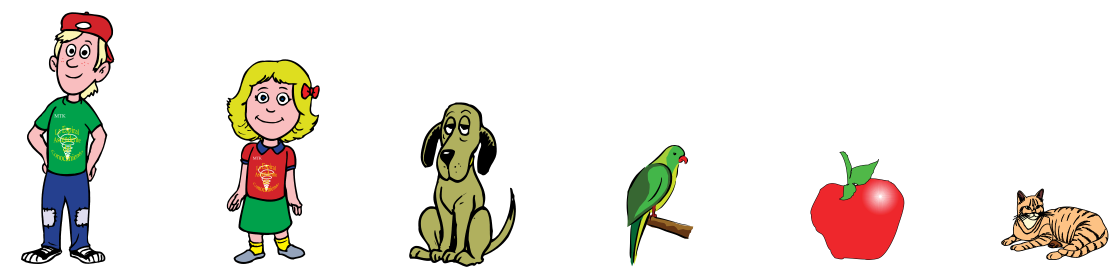
Conjunto de pericos.



Conjunto de niños.

Primera dimensión de los números

Los números representan personas, animales y objetos



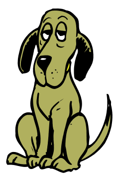
Niño. Niña. Perro. Perico. Manzana. Gato.

Para entender mejor el mundo en el que vivimos a cada persona, animal y objeto le asignamos el número uno. El número que la escuela Pitagórica consideraba el más importante de todos los números, ya que es el generador de los demás

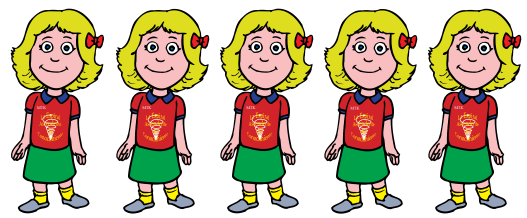
Un niño. Una niña. Un perro. Un perico. Una manzana. Un gato.

Segunda dimensión de los números

Los números tienen un nombre

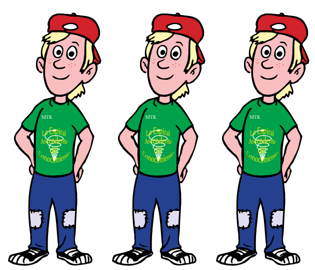


Un perro.

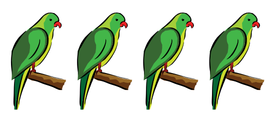


Cinco niñas.

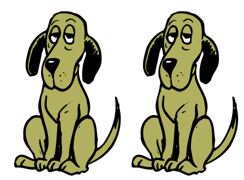
Uno	Seis
Dos	Siete
Tres	Ocho
Cuatro	Nueve
Cinco	



Tres niños.



Cuatro pericos.

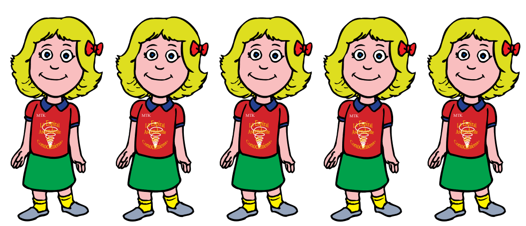


Dos perros.

Tercera dimensión de los números

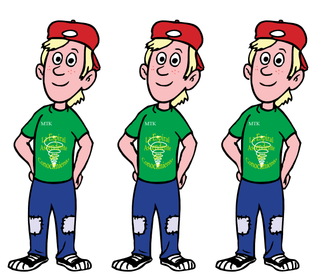
Los números se representan con un símbolo

1 perro.

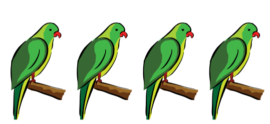


5 niñas.

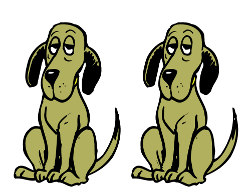
1 Uno	6 Seis
2 Dos	7 Siete
3 Tres	8 Ocho
4 Cuatro	9 Nueve
5 Cinco	



3 niños.



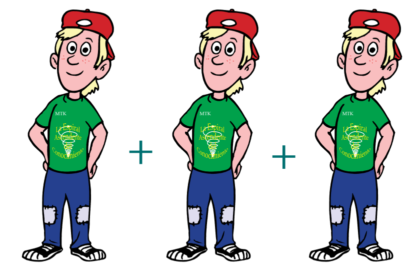
4 pericos.



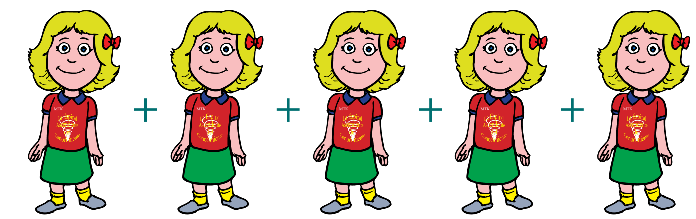
2 perros.

Cuarta dimensión de los números

Los números contienen el concepto de la suma



1 + 1 + 1 = 3 niños.



1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5 niñas.

El número cero

El número cero es un número muy especial

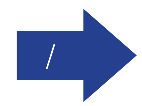
El cero es el número que utilizamos para indicar que no hay ninguna persona, animal u objeto.

Los números también representan dimensiones

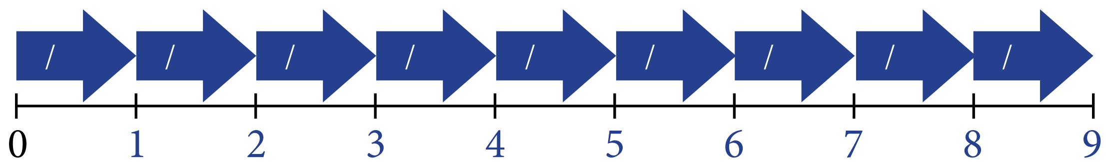
La recta de los números

Utilizamos una unidad convencional para medir las distancias. Por ejemplo: utilizar una cuarta, un pie, una vara, o alguna de las unidades de medición: el metro, el centímetro, etc.

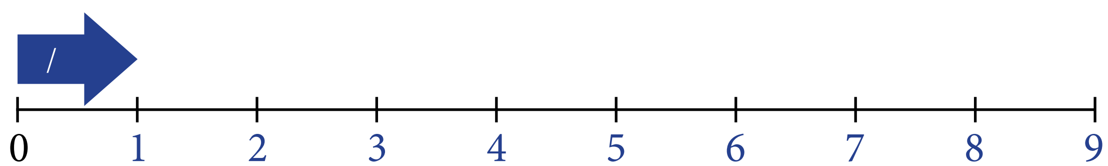
Podemos también utilizar una flecha, a la que llamamos vector, para medir la distancia.

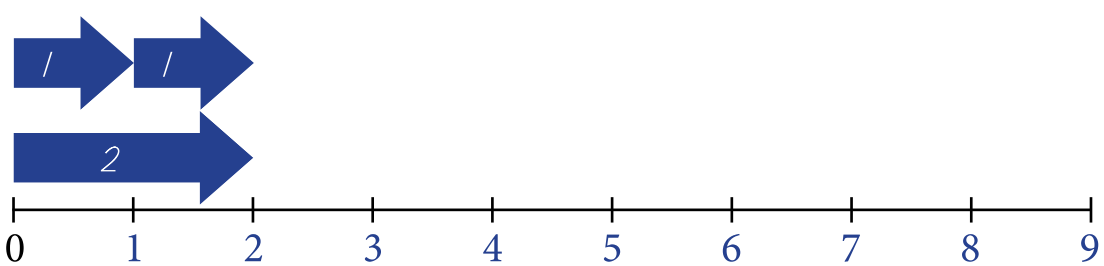


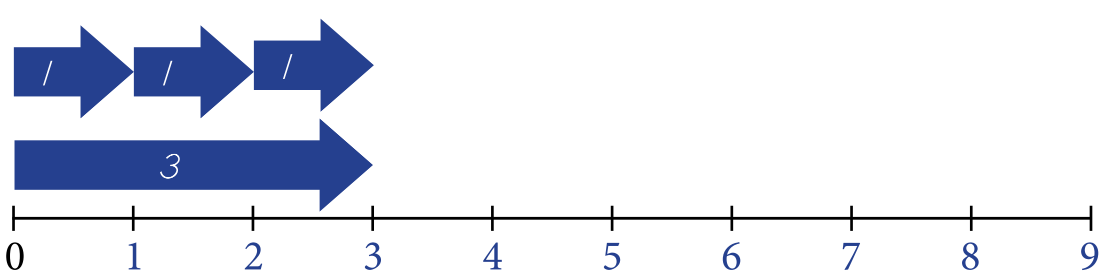
Si colocamos un vector delante del otro para sumarlos, construimos la recta de los números.

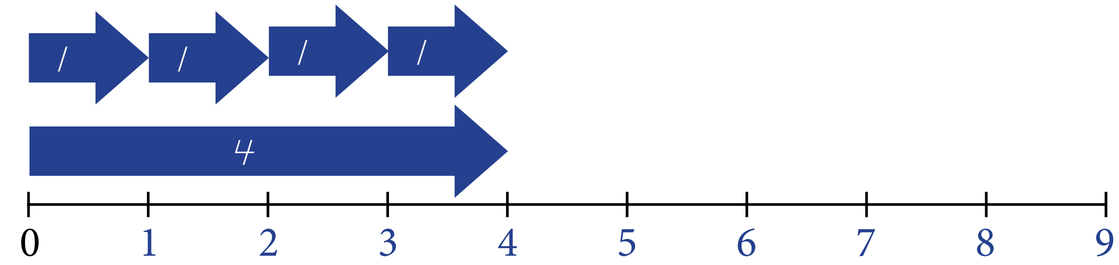


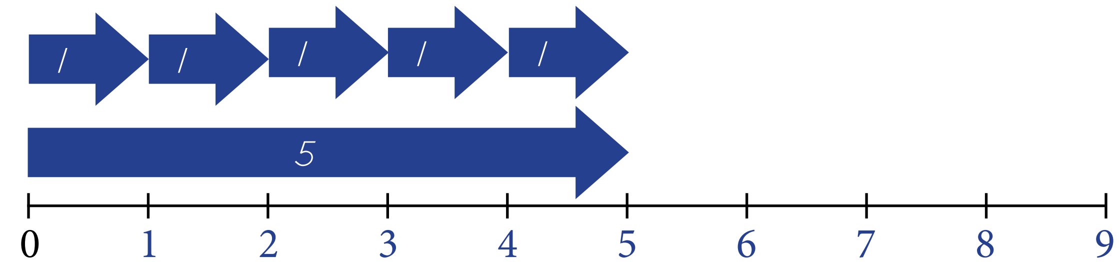
Sumamos los vectores para crear las distancias del 1 al 9.

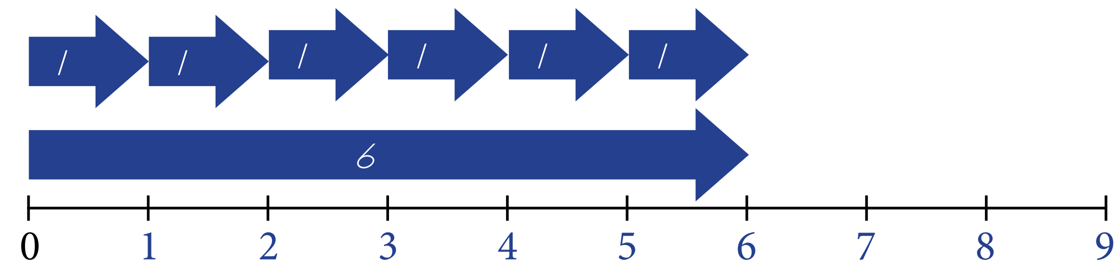


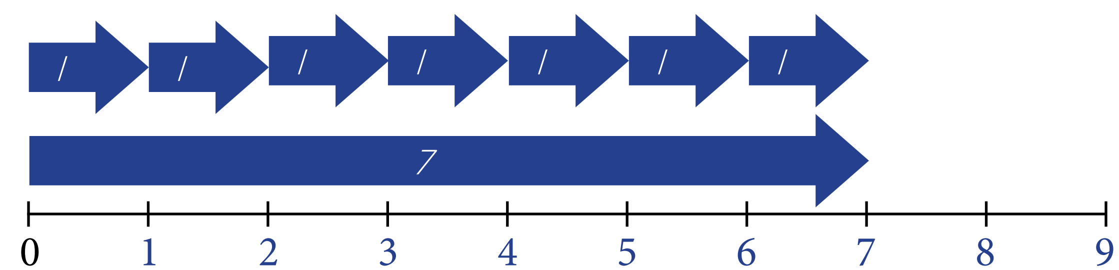


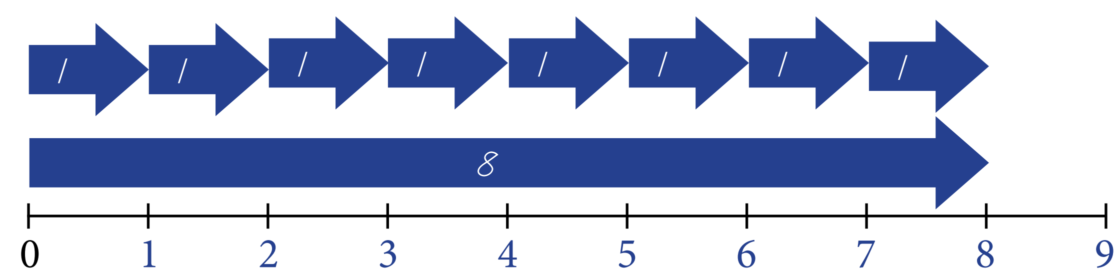


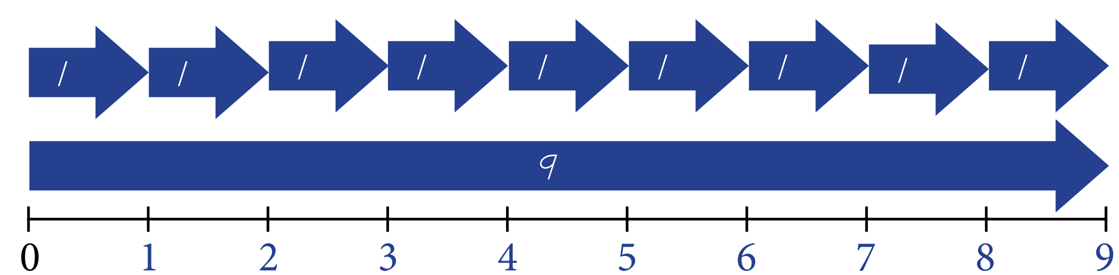












Dinámica Básica del Sistema de Numeración Decimal

Primer Nivel de Abstracción

Los números del 1 al 9 y el 0

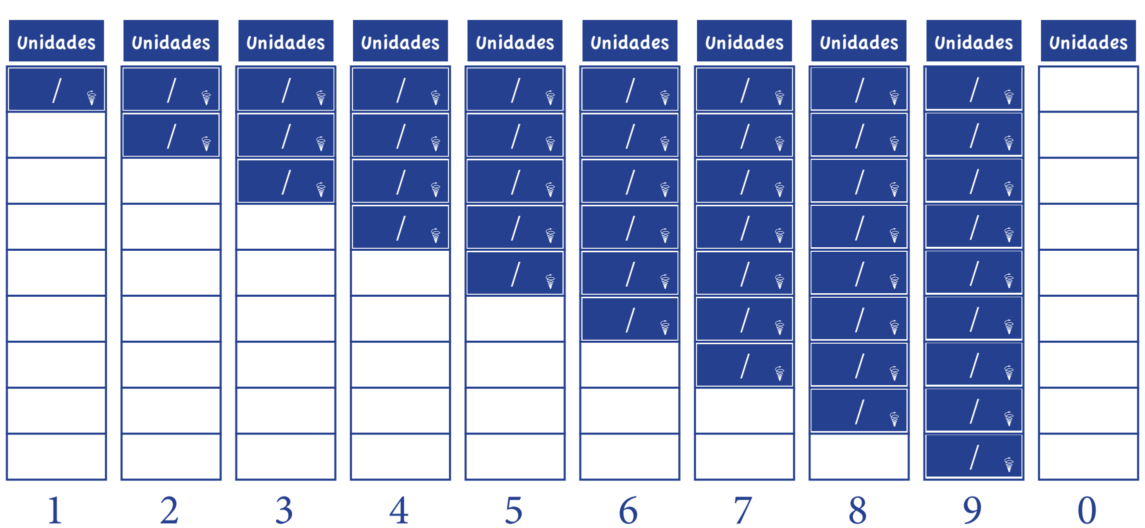
Con el número 1 creamos los otros 8 dígitos

1
1 + 1 = 2
1 + 1 + 1 = 3
1 + 1 + 1 + 1 = 4
1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5
1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6
1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 7
1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 8
1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 9

Las columnas numéricas

Para poder crear los números cuando solamente contamos con nueve dígitos y el cero utilizamos las columnas numéricas.

Estos nueve dígitos los acomodamos en una columna, la cual llamamos Columna de las Unidades.

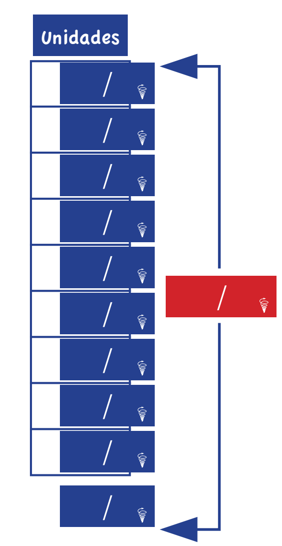


Los números del 10 al 99

La columna de las decenas

Solamente tenemos nueve dígitos, por lo tanto, las columnas solamente tienen nueve espacios donde podemos colocarlos.

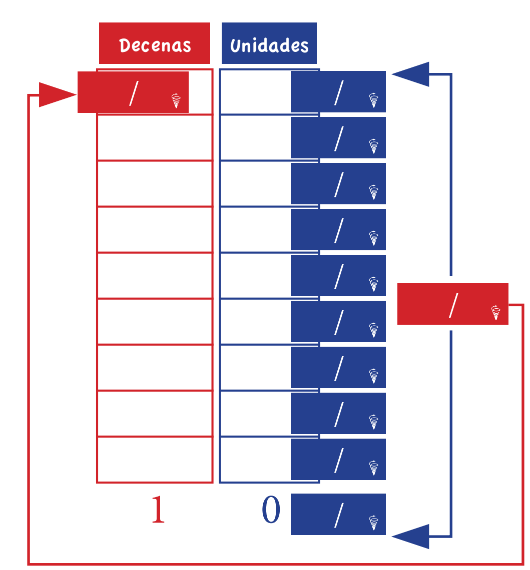
Si colocamos otro 1 en la Columna de las Unidades, creamos una nueva unidad la cual llamamos Decena, porque está formada de 10 unidades o unos.



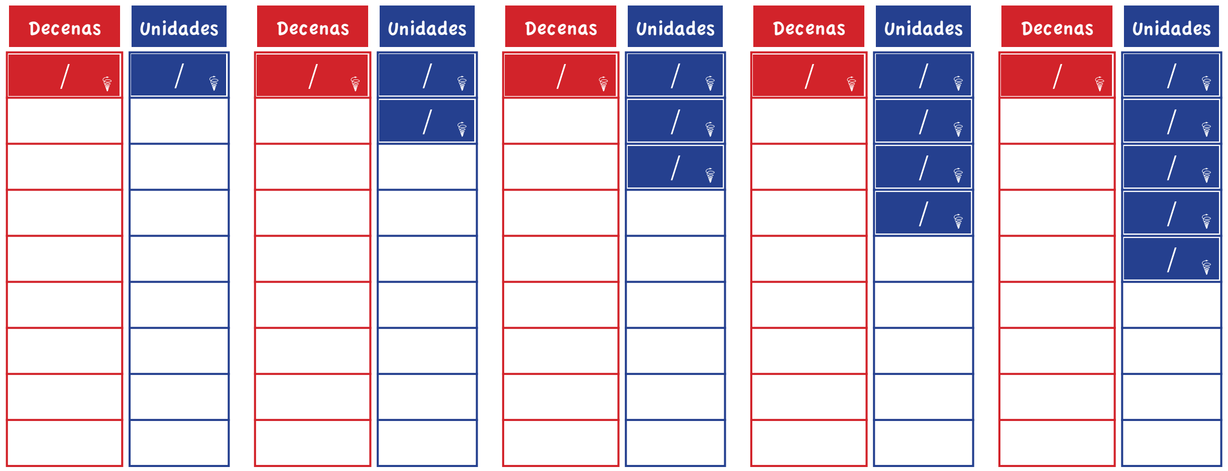
Esa nueva unidad que hemos creado, 1 Decena, la colocamos en la columna de la izquierda, la cual llamamos la Columna de las Decenas.

La Columna de las Unidades, ahora está vacía. Para indicar que no tiene ninguna unidad o uno, colocamos el número 0.

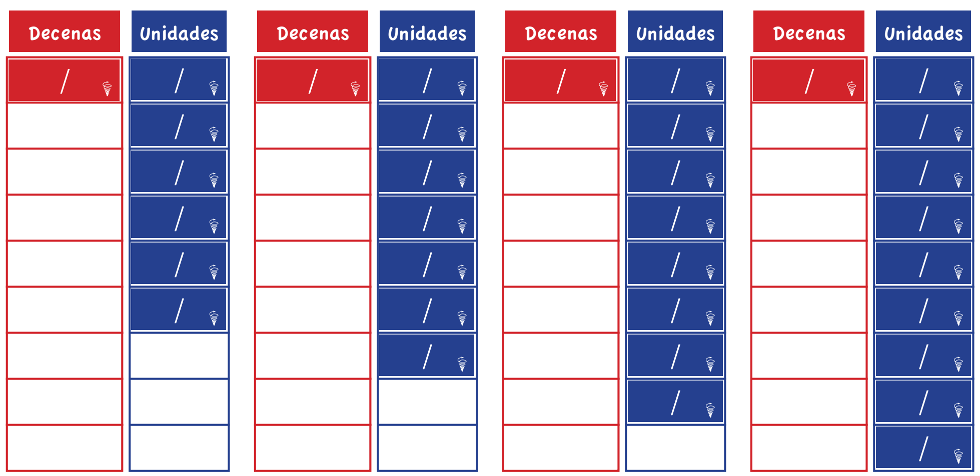
Creamos el número 10.
El nombre del número es diez.



Ahora podemos crear 9 números más: los números 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19.



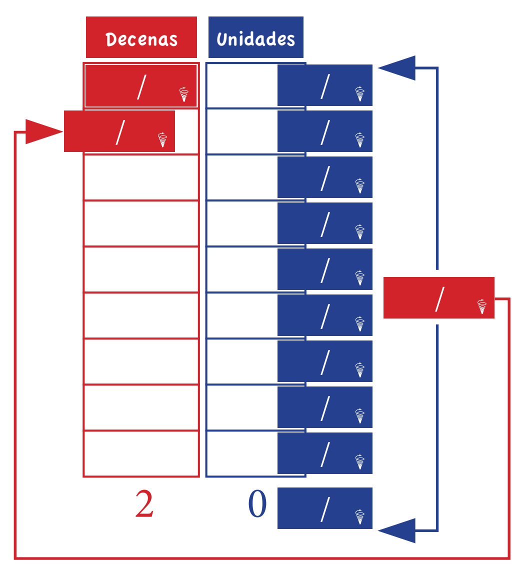
1 1 Once | 1 2 Doce | 1 3 Trece | 1 4 Catorce | 1 5 Quince



1 6 Dieciséis | 1 7 Diecisiete | 1 8 Dieciocho | 1 9 Diecinueve

Ahora colocamos una ficha más en la Columna de las Unidades, creamos una decena y la movemos a la columna de la izquierda, la Columna de las Decenas.

Hemos creado el número 20.
El nombre del número es veinte.

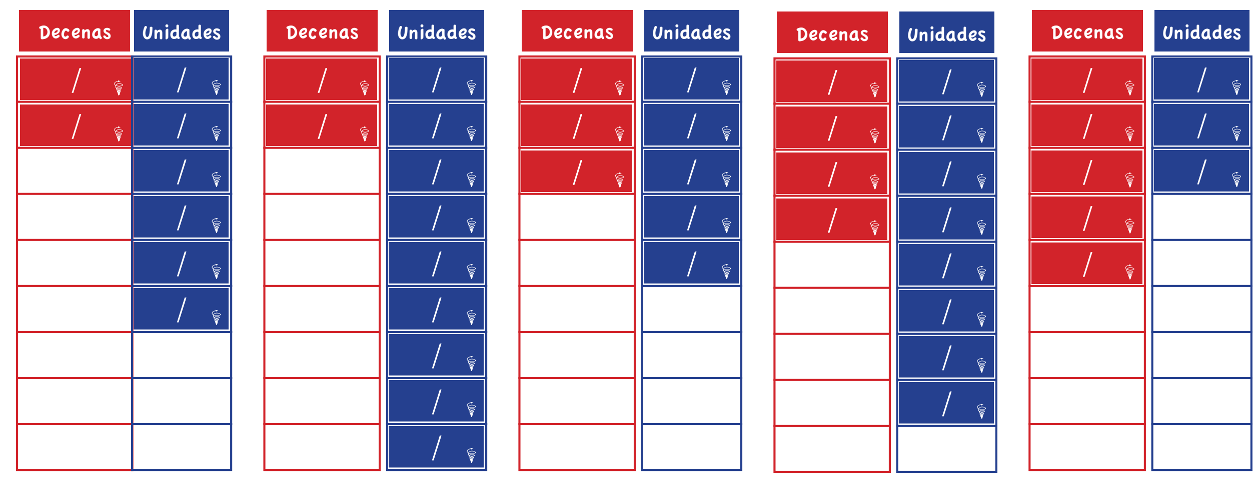


En la dinámica básica del sistema de numeración decimal, todas las columnas se comportan de la misma manera.

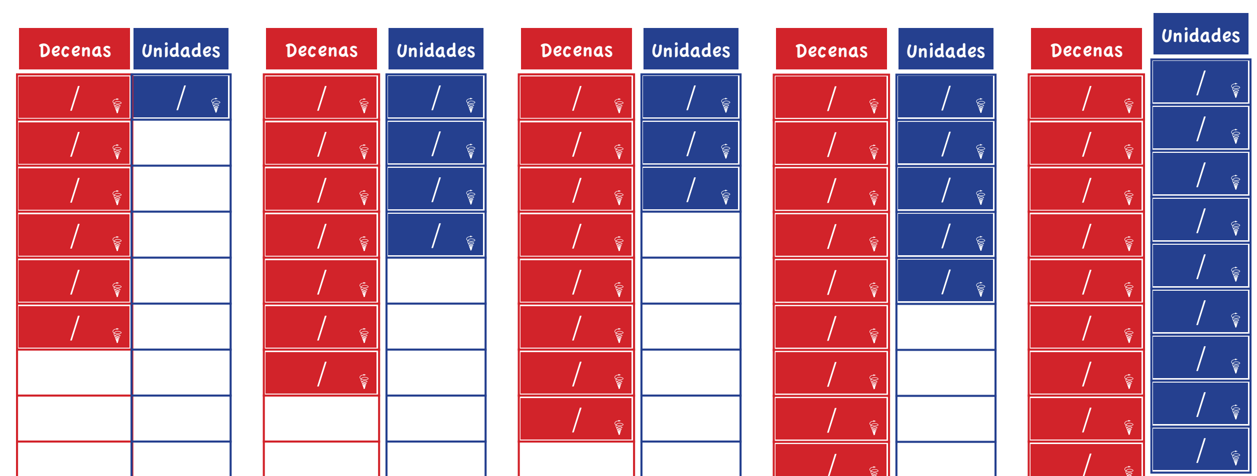
Colocando unos en la Columna de las Unidades, creamos los números del 21 al 29. Colocamos otro uno en la Columna de las Unidades, creamos una decena y la movemos a la columna de la izquierda, la Columna de las Decenas y creamos el número 30.

Los nombres de los números son muy fáciles ya que el apellido depende de la columna en la cual nos encontramos. En el caso de la Columna de las Decenas los apellidos son: veinte, treinta, cuarenta, cincuenta, sesenta, setenta, ochenta, noventa.

Siguiendo la dinámica básica del sistema de numeración decimal, podemos crear los números hasta el 99.



2 6 Veintiséis | 2 9 Veintinueve | 3 5 Treinta y cinco | 4 8 Cuarenta y ocho | 5 3 Cincuenta y tres



6 1 Sesenta y uno | 7 4 Setenta y cuatro | 8 3 Ochenta y tres | 9 5 Noventa y cinco | 9 9 Noventa y nueve

La escritura de los números

Los nombres de los números

El sistema de numeración es decimal, es decir, está construido con diez símbolos. Cada uno de estos símbolos corresponde a un número de objetos o dimensiones.

A estos diez símbolos o números les llamamos dígitos, porque los hemos construido contando con los dedos de las manos.

Los nombres de los dígitos, excepto el cero, los utilizamos para construir los nombres de todos los números.

Columna de las unidades

Unidad de la columna de las unidades.

Nombres de las unidades.

1	uno
2	dos
3	tres
4	cuatro
5	cinco
6	seis
7	siete
8	ocho
9	nueve
0	cero

Columna de las decenas

Unidad de la columna de las decenas.

Nombres de las decenas.

10	diez
20	veinte
30	treinta
40	cuarenta
50	cincuenta
60	sesenta
70	setenta
80	ochenta
90	noventa

Columna de las centenas

Unidad de la columna de las centenas.

Nombres de las centenas.

100	cien
200	doscientos
300	trescientos
400	cuatrocientos
500	quinientos
600	seiscientos
700	setecientos
800	ochocientos
900	novecientos

Una vez que conocemos los nombres de las decenas y las centenas, los combinamos con los nombres de las unidades y construimos los nombres de los números.

En español hay *cinco* números cuyos nombres son una *excepción*. Estos números son:

11 → once
12 → doce
13 → trece
14 → catorce
15 → quince

El resto los nombres de números en la columna de las decenas, se construyen combinando el nombre de las decenas y el nombre de las unidades.

16 → dieciséis	21 → veintiuno	31 → treinta y uno
17 → diecisiete	22 → veintidós	32 → treinta y dos
18 → dieciocho	23 → veintitrés	33 → treinta y tres
19 → diecinueve	24 → veinticuatro	34 → treinta y cuatro
	25 → veinticinco	35 → treinta y cinco
	26 → veintiséis	36 → treinta y seis
	27 → veintisiete	37 → treinta y siete
	28 → veintiocho	38 → treinta y ocho
	29 → veintinueve	39 → treinta y nueve

Los nombres de los números creados con cuarenta, cincuenta, sesenta, setenta, ochenta y noventa, siguen exactamente el mismo patrón que treinta.

Los nombres de números en la columna de las centenas, se construyen combinando el nombre de las centenas, las decenas y las unidades.

101 → ciento uno	211 → doscientos once
102 → ciento dos	211 → doscientos doce
103 → ciento tres	211 → doscientos trece
104 → ciento cuatro	211 → doscientos catorce
105 → ciento cinco	211 → doscientos quince
106 → ciento seis	211 → doscientos dieciséis
107 → ciento siete	211 → doscientos diecisiete
108 → ciento ocho	211 → doscientos dieciocho
109 → ciento nueve	211 → doscientos diecinueve

351 → trescientos cincuenta y uno
352 → trescientos cincuenta y dos
353 → trescientos cincuenta y tres
354 → trescientos cincuenta y cuatro
355 → trescientos cincuenta y cinco
356 → trescientos cincuenta y seis
357 → trescientos cincuenta y siete
358 → trescientos cincuenta y ocho
359 → trescientos cincuenta y nueve

Cuando pasamos a las columnas de los *millares* o *miles*, añadimos *mil* o *miles*, a los nombres de los números del 1 al 999.

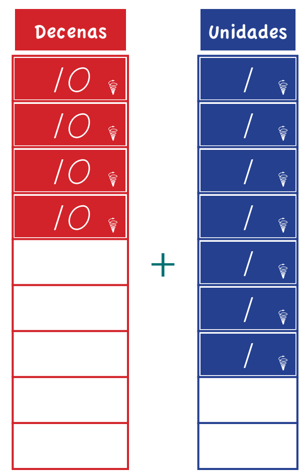
351,946 → trescientos cincuenta y un mil novecientos cuarenta y seis.
674,682 → seiscientos setenta y cuatro mil seiscientos ochenta y dos.
836,293 → ochocientos treinta y seis mil doscientos noventa y tres.
965,379 → novecientos sesenta y cinco mil trescientos setenta y nueve.

Notación desarrollada

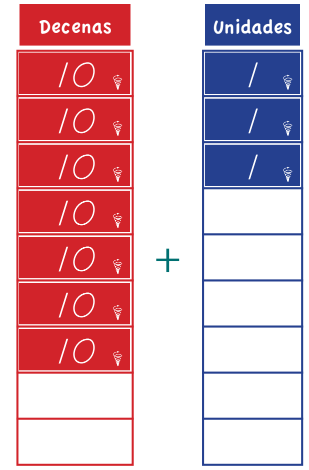
Todos los números los podemos escribir en notación compacta o en notación desarrollada.

En la notación desarrollada tomamos en cuenta no solamente la posición de la columna, es decir si se trata de la Columna de las Unidades o de la Columna de las Decenas que se encuentra a la izquierda, sino también las unidades o unos que cada decena tiene.

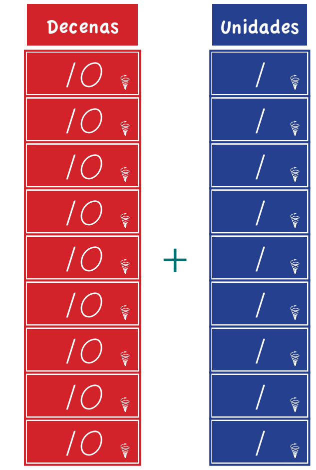
Si utilizamos notación desarrollada las Columnas de las Unidades y las Decenas podríamos visualizarlas de la siguiente manera.



40 + 7 = 47



70 + 3 = 73



90 + 9 = 99

10 + 5 = 15

80 + 1 = 81

60 + 0 = 60

40 + 4 = 44

20 + 9 = 29

70 + 6 = 76

30 + 3 = 33

50 + 2 = 52

90 + 7 = 97

Segundo Nivel de Abstracción

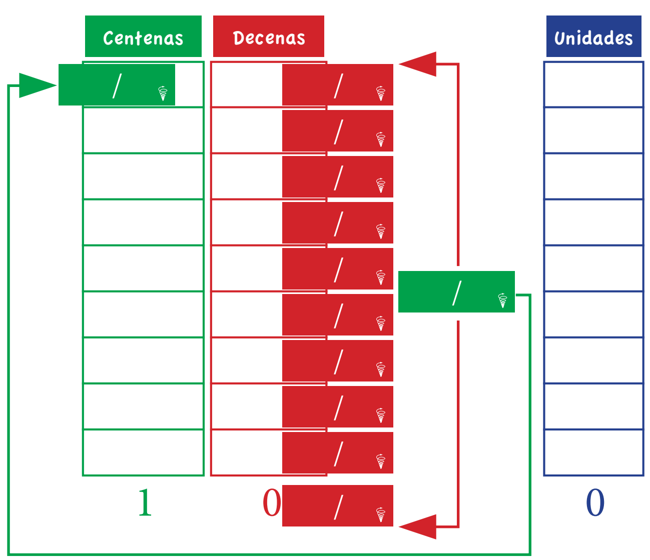
Los números del 100 al 999

La columna de las centenas

Una vez que hemos creado el número 99, tanto la Columna de las Unidades como la Columna de la Decenas están llenas.

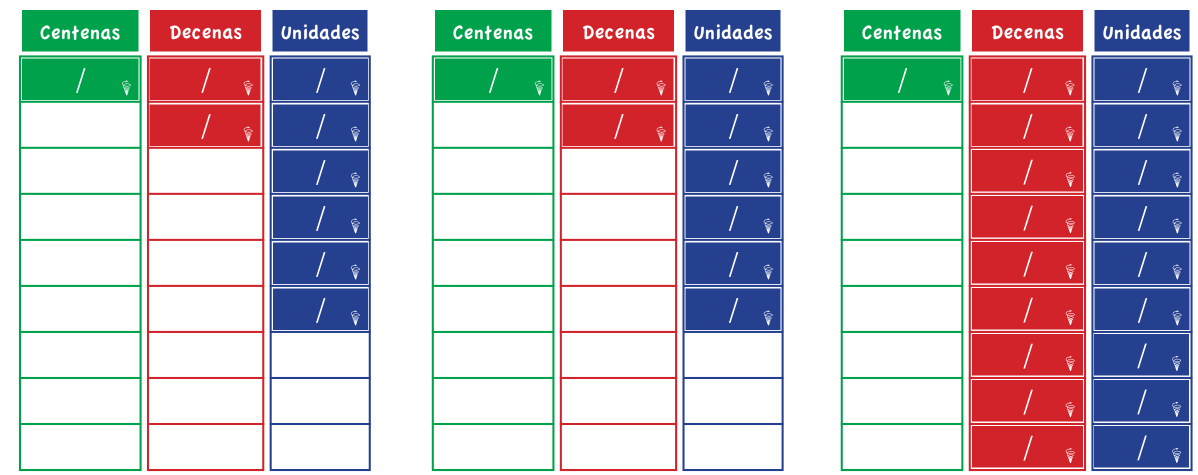
Siguiendo la dinámica básica del sistema de numeración decimal, colocamos otra decena en la Columna de las Decenas y creamos una nueva unidad a la cual llamamos centena porque contiene diez decenas que son cien unidades o unos.

Esta nueva unidad la centena, la movemos a la columna de la izquierda la cual se llama Columna de las Centenas.



Hemos creado el número 100, cuyo nombre es cien.

Colocamos decenas en la Columna de las Decenas y unidades o unos en la Columna de las Unidades para crear más números. El nombre de los números es muy sencillo ya que solamente tenemos que agregar la palabra ciento.



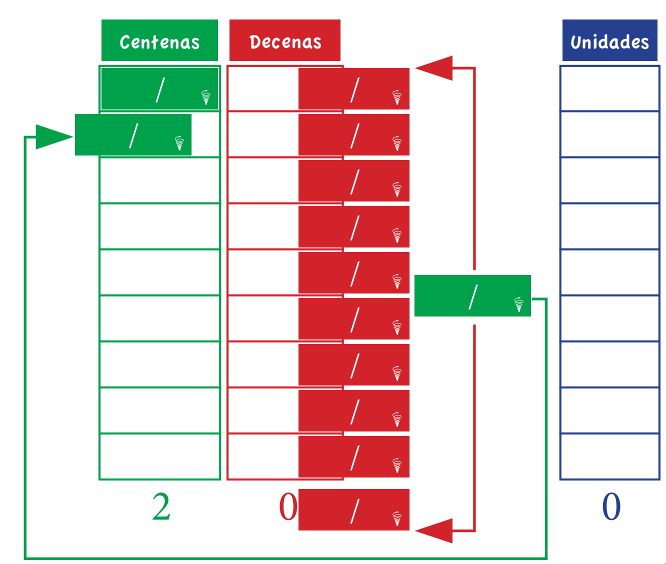
1 2 6 — Ciento veintiséis

1 5 8 — Ciento cincuenta y ocho

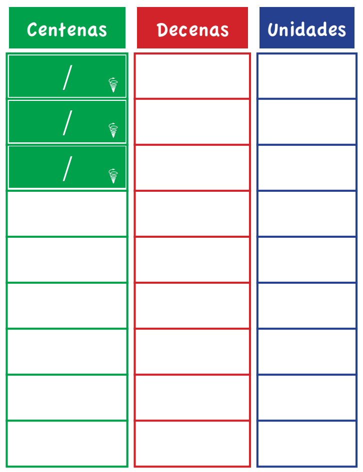
1 9 9 — Ciento noventa y nueve

Ahora que hemos creado el número 199 utilizamos la dinámica básica del sistema de numeración decimal para crear otra centena.

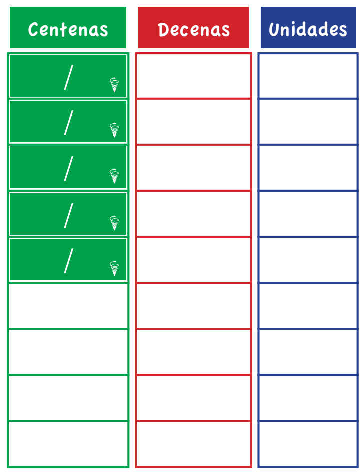
Hemos creado el número 200. El nombre del número es doscientos.



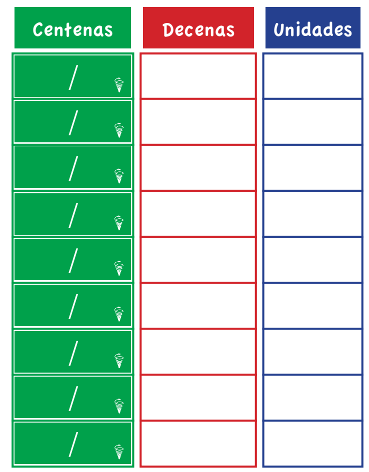
Siguiendo la dinámica básica del sistema de numeración decimal creamos los números: 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900. Los nombres de los números son: trescientos, cuatrocientos, quinientos, seiscientos, setecientos, ochocientos, novecientos.



3 0 0
Trescientos

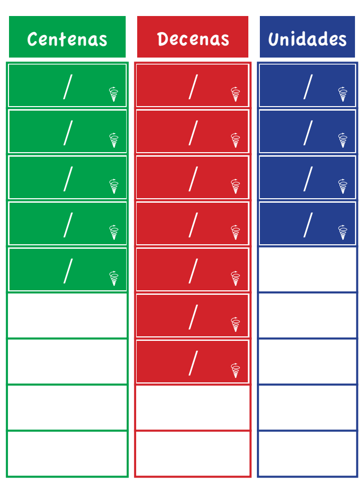


5 0 0
Quinientos

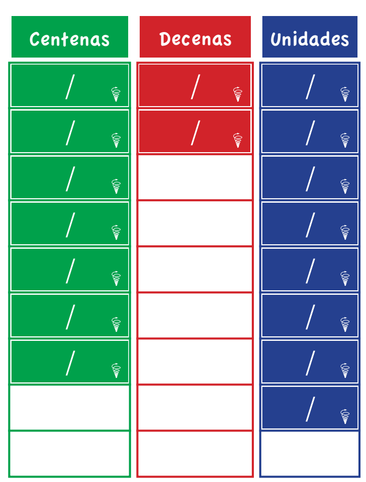


9 0 0
Novecientos

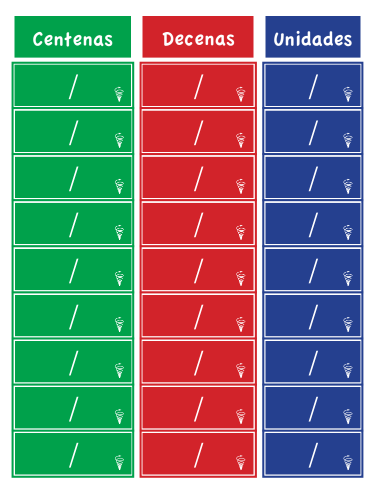
Colocamos decenas en la Columna de las Decenas y unidades o unos en la Columna de las Unidades los números hasta el 999.



5 7 4
Quinientos setenta y cuatro



7 2 8
Setecientos veintiocho

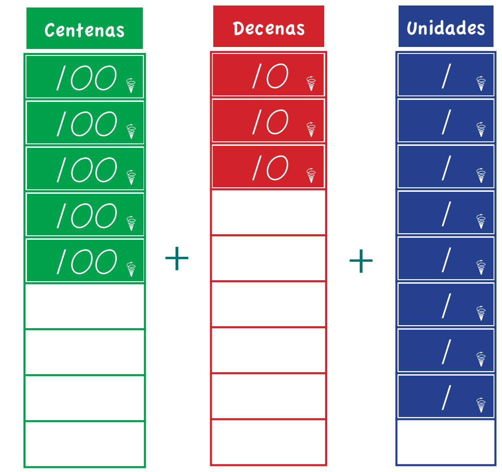


9 9 9
Novecientos noventa y nueve

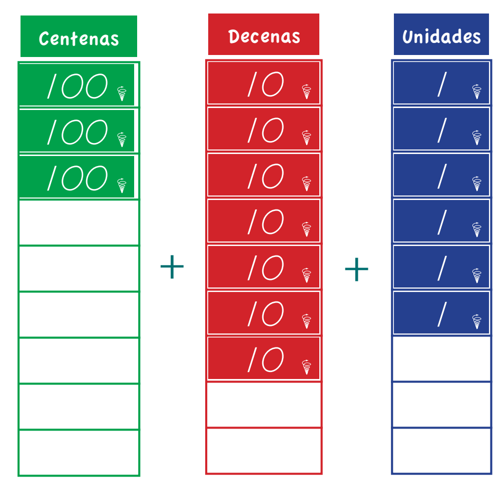
Notación desarrollada

Para escribir los números que hemos creado en notación desarrollada, tomamos en cuenta la posición de la columna y las unidades o unos que cada decena y cada centena tienen.

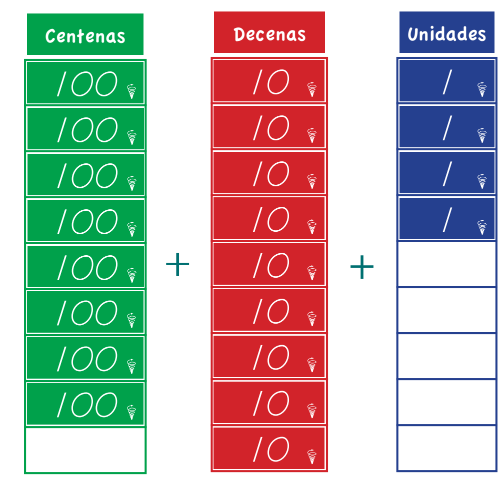
Si utilizamos notación desarrollada las Columnas de las Unidades, las Decenas y las Centenas, podríamos visualizarlas de la siguiente manera.



500 + 30 + 8 = 538



300 + 70 + 6 = 376



800 + 90 + 4 = 894

100 + 80 + 6 = 186
900 + 50 + 5 = 955
500 + 10 + 8 = 518

300 + 20 + 3 = 323
700 + 70 + 1 = 771
200 + 40 + 7 = 247

800 + 60 + 9 = 869
400 + 30 + 2 = 432
600 + 90 + 4 = 694

Tercer Nivel de Abstracción

Los números naturales

Unidades, decenas y centenas de millar

La dinámica básica del sistema de numeración decimal nos permite seguir creando números sin nunca poder terminar. Por eso decimos que hay una cantidad infinita de números.

Para crear los números naturales necesitamos solamente dos ingredientes:

Los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y el 0.
Las Columnas Numéricas.

Las columnas numéricas se recorren de derecha a izquierda, en dirección contraria a la manera como nosotros escribimos. Para escribir una palabra empezamos a la izquierda y seguimos hacia la derecha. Para crear las columnas numéricas empezamos a la derecha y seguimos hacia la izquierda.

Los Árabes inventaron las columnas numéricas y ellos escriben de derecha a izquierda, y es de esa forma como las construyeron.

La dinámica básica del sistema de numeración decimal establece que las columnas numéricas de las unidades, decenas y centenas se repiten en forma cíclica. A cada ciclo en el que se repiten las tres columnas le damos un nombre.

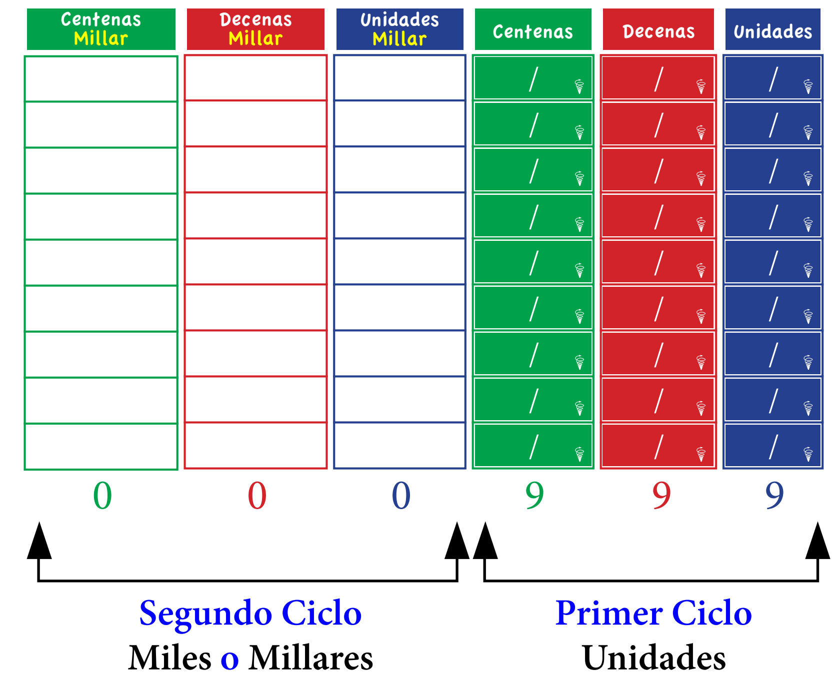
El nombre que le asignamos a ese ciclo de tres columnas corresponde a la cantidad de unidades o unos que la Columna de las Unidades en ese ciclo tiene.

En el primer ciclo de tres columnas, el que hasta ahora hemos creado, la Columna de las Unidades tiene solamente 1 unidad o uno. A este primer ciclo de tres columnas le llamamos el ciclo de las unidades.

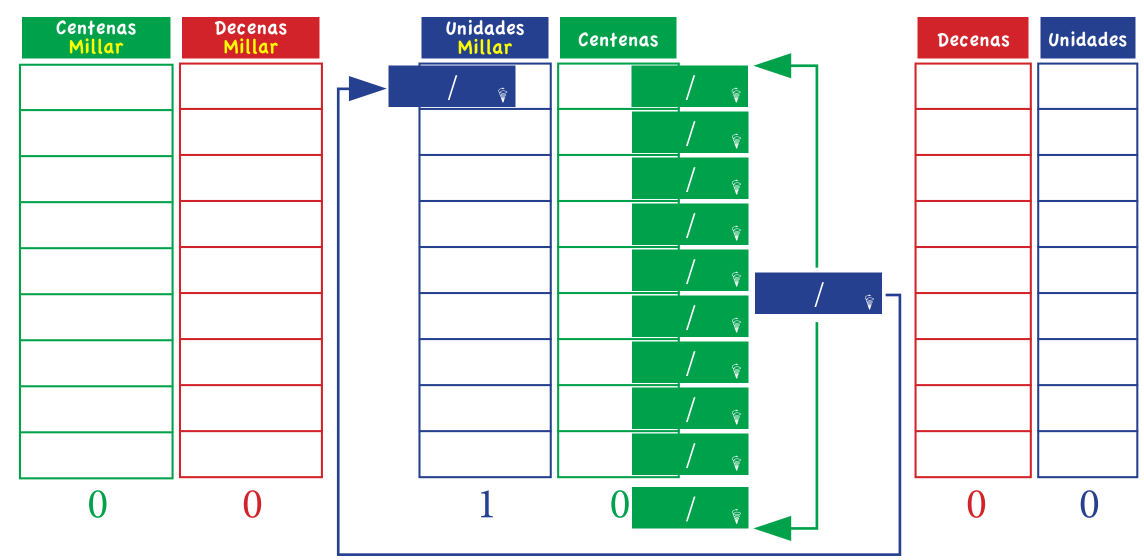
En el segundo ciclo de tres columnas que vamos a crear, en la Columna de las Unidades hay 1,000 unidades o unos. Al número 1,000 le llamamos mil, por lo cual este ciclo de tres columnas se llamará de los miles o millares.

Vamos a tener las Columnas de las Unidades, Decenas y Centenas de mil o de millar.

Al primer ciclo de tres columnas que hemos creado, le añadimos el segundo ciclo de tres columnas especificando que se trata del ciclo de los miles o millares.

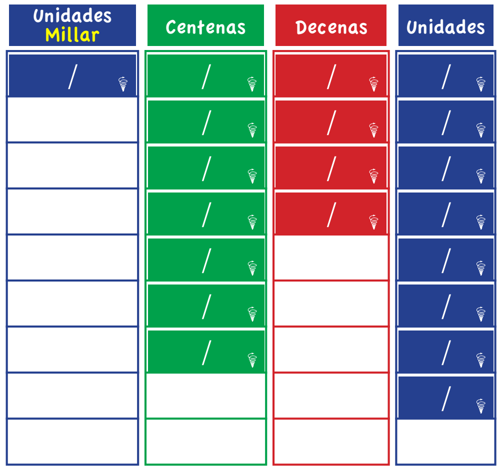


Siguiendo la dinámica básica del sistema de numeración decimal, colocamos otra centena en la Columna de las Centenas y creamos una nueva unidad a la cual llamamos unidades de millar porque contiene diez centenas que son mil unidades o unos.



Hemos creado el número 1,000. El nombre del número es mil.

Colocamos centenas, decenas y unidades en sus columnas correspondientes y creamos más números. Los nombres de estos números empezarán con el apellido mil.



1 7 4 8

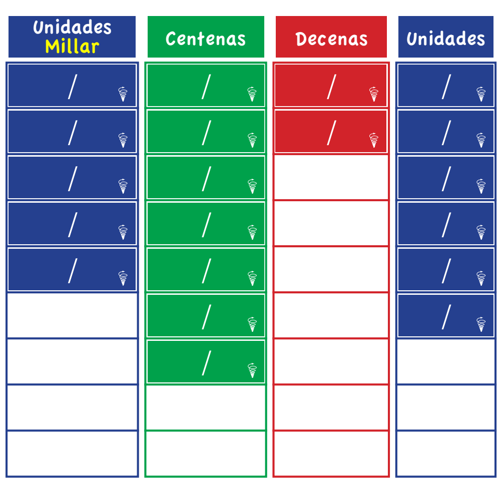
Mil setecientos cuarenta y ocho

1 3 9 5

Mil trescientos noventa y cinco

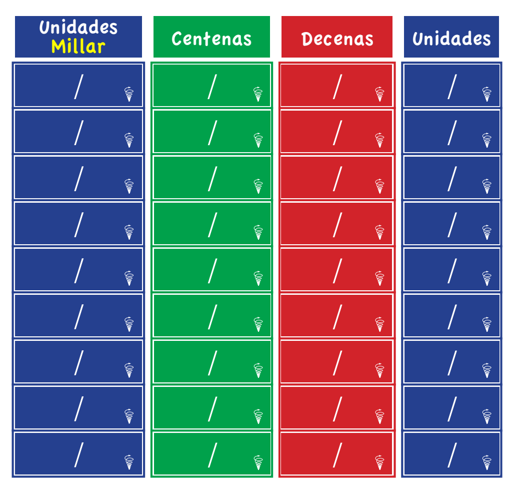
Siguiendo la dinámica básica del sistema de numeración decimal, creamos los números: 2,000, 3,000, 4,000, 5,000, 6,000, 7,000, 8,000, 9,000. Los nombres de los números son: dos mil, tres mil, cuatro mil, cinco mil, seis mil, siete mil, ocho mil, nueve mil.

Colocamos centenas, decenas y unidades en sus columnas correspondientes y creamos más números. El apellido de todos estos números es mil.



5 7 2 6

Cinco mil setecientos vein-tiséis

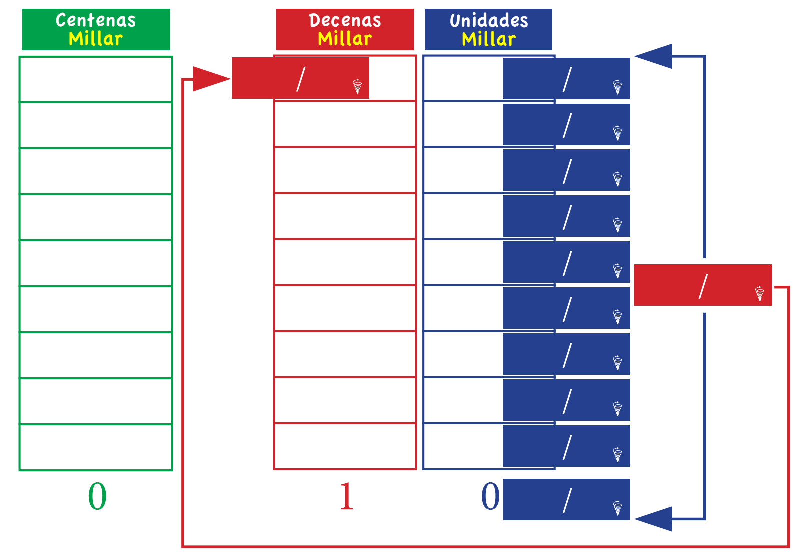


9 9 9 9

Nueve mil novecientos no-venta y nueve

Ahora que hemos entendido, demostrado y aplicado la dinámica básica del sistema de numeración decimal para crear números, la utilizamos para seguir creando números.

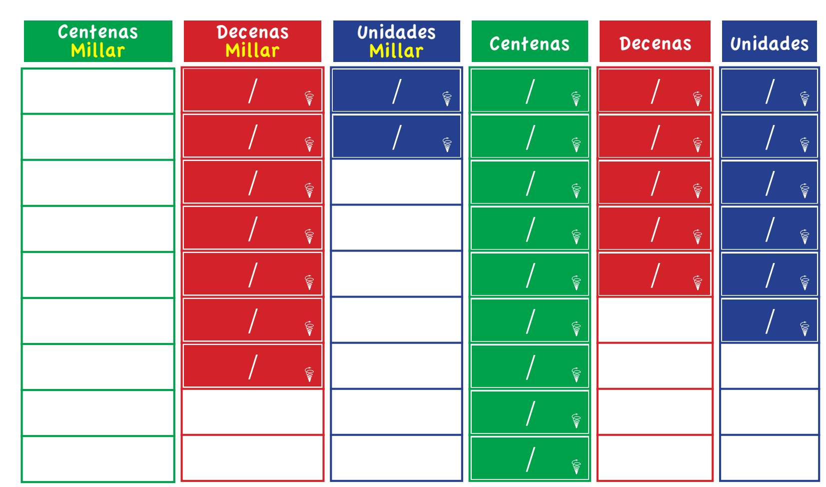
Una vez que hemos creado el número 9,999, colocamos otra unidad de millar o mil y creamos una decena de millar o de mil.



Creamos el número 10,000. Es muy sencillo deducir que el nombre del número es diez mil. Una decena en el ciclo de los millares o miles.

Aplicando la dinámica básica del sistema de numeración decimal, creamos los números: 20,000, 30,000, 40,000, 50,000, 60,000, 70,000, 80,000, 90,000. Sabemos que los nombres de los números son: veinte mil, treinta mil, cuarenta mil, cincuenta mil, sesenta mil, setenta mil, ochenta mil, noventa mil.

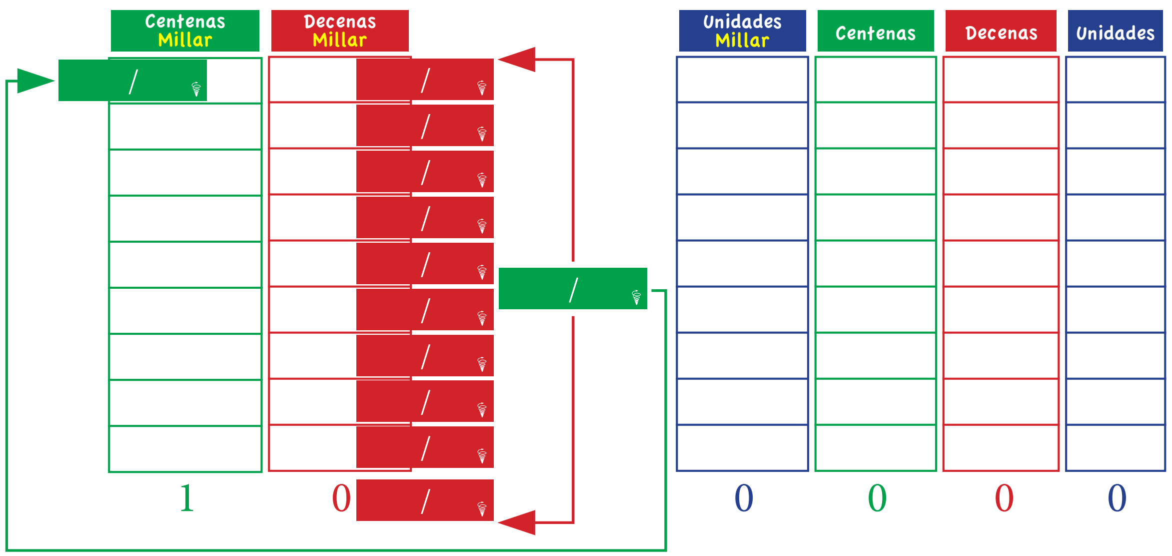
Colocamos unidades de millar, centenas, decenas y unidades en sus columnas correspondientes para crear más números.



0 7 2 9 5 6

Setenta y dos mil novecientos cincuenta y seis

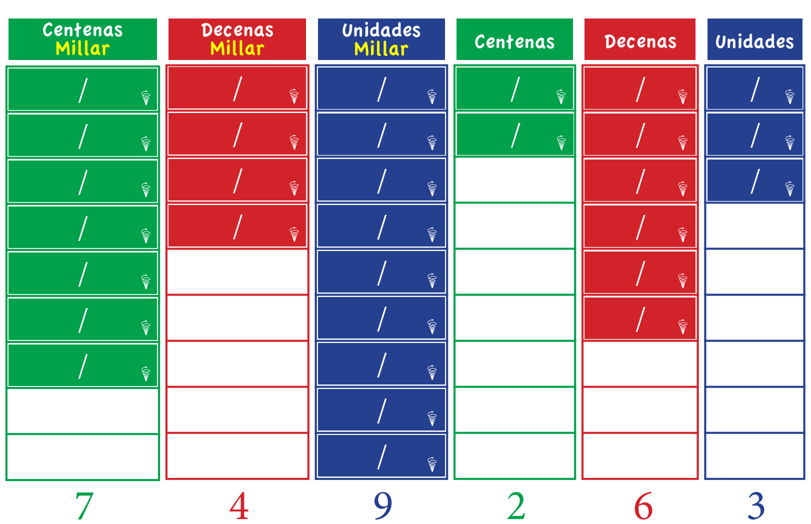
Resulta muy sencillo crear una centena de millar, ya que diez decenas de millar forman una centena de millar. Es exactamente lo mismo que hicimos en el primer ciclo, en el ciclo de las unidades.



Creamos el número 100,000. Es muy sencillo deducir que el nombre del número es cien mil. Una centena en el ciclo de los millares o miles.

Aplicando la dinámica básica del sistema de numeración decimal, creamos los números: 200,000, 300,000, 400,000, 500,000, 600,000, 700,000, 800,000, 900,000. Sabemos que los nombres de los números son: doscientos mil, trescientos mil, cuatrocientos mil, quinientos mil, seiscientos mil, setecientos mil, ochocientos mil, novecientos mil.

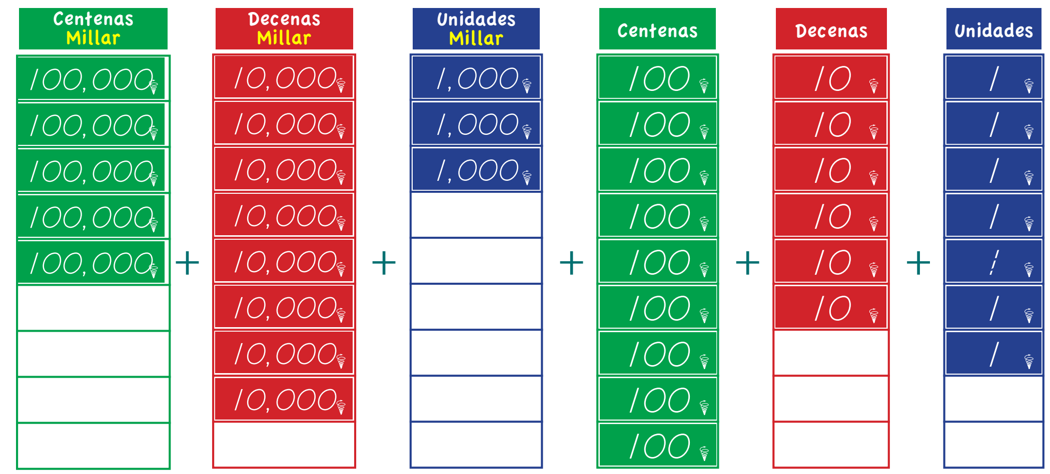
Colocamos decenas de millar, unidades de millar, centenas, decenas y unidades en sus columnas correspondientes para crear más números.



Setecientos cuarenta y nueve mil doscientos sesenta y tres

Notación desarrollada

Para escribir los números en notación desarrollada, tomamos en cuenta la posición de la columna y las unidades o unos que cada decena y cada centena en cada ciclo de tres columnas tienen.



500,000 + 80,000 + 3,000 + 900 + 60 + 7 = 583,967

Visualizamos las Columnas de las Unidades, las Decenas y las Centenas, utilizando notación desarrollada de la siguiente manera.

500,000 + 80,000 + 3,000 + 900 + 60 + 7 = 583,967

900,000 + 20,000 + 4,000 + 100 + 70 + 3 = 924,173

200,000 + 50,000 + 0,000 + 700 + 90 + 4 = 250,794

700,000 + 40,000 + 8,000 + 100 + 30 + 9 = 748,139

400,000 + 90,000 + 6,000 + 200 + 80 + 5 = 496,285

Los números naturales enteros

La cantidad de números que podemos crear es infinita

Para crear los números naturales necesitamos solamente dos ingredientes:

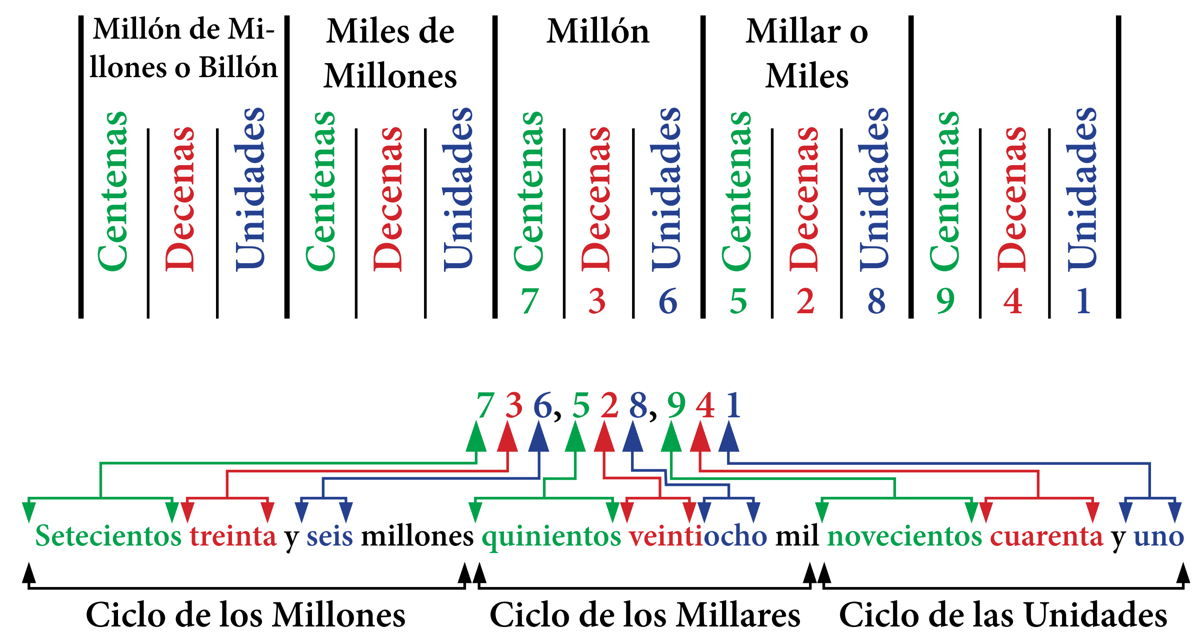
Los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y el 0.
Las Columnas Numéricas.

La dinámica básica del sistema de numeración decimal establece que las columnas numéricas de las unidades, decenas y centenas se repiten en forma cíclica. A cada ciclo en el que se repiten las tres columnas le damos un nombre.

El nombre que le asignamos a ese ciclo de tres columnas corresponde a la cantidad de unidades o unos que la Columna de las Unidades en ese ciclo tiene.

Los ciclos de las columnas numéricas son:

Primer Ciclo:	Unidades.
Segundo Ciclo:	Millares o Miles.
Tercer Ciclo:	Millones.
Cuarto Ciclo:	Miles de Millones.
Quinto Ciclo:	Millones de Millones o Billones.



Cuarto Nivel de Abstracción

Recorrer las columnas numéricas de derecha a izquierda

Multiplicar por 10

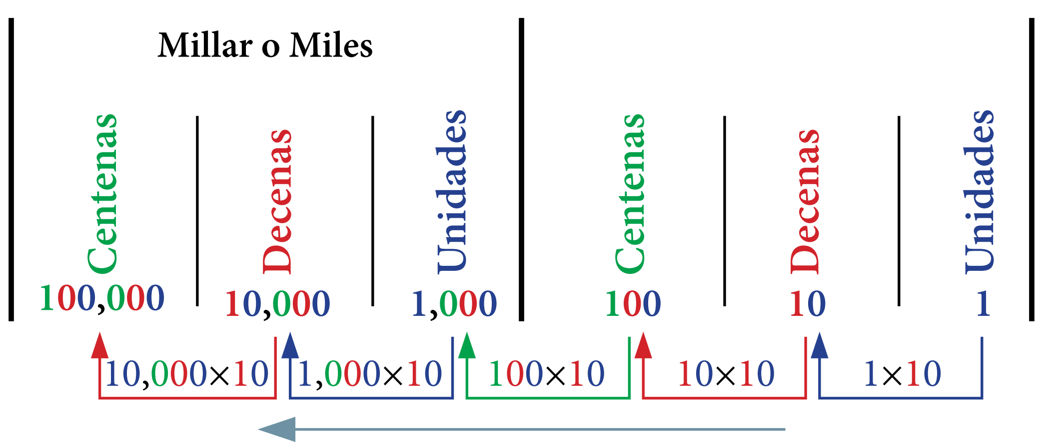
Al sistema de numeración le llamamos *decimal* porque está basado en el número 10, ya que utilizamos los dedos de las manos para crear los 10 símbolos que construyen todos los números naturales.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

Porque el sistema de numeración decimal tiene 10 símbolos, también se llama sistema de numeración base 10.

Por lo cual, cuando pasamos de la columna de las unidades a la columna de las decenas, es equivalente a multiplicar por 10, ya que 1 decena tiene 10 unidades.

Cuando pasamos de la columna de las decenas a la columna de las centenas, es equivalente a multiplicar por 10, ya que 1 centena tiene 10 decenas.

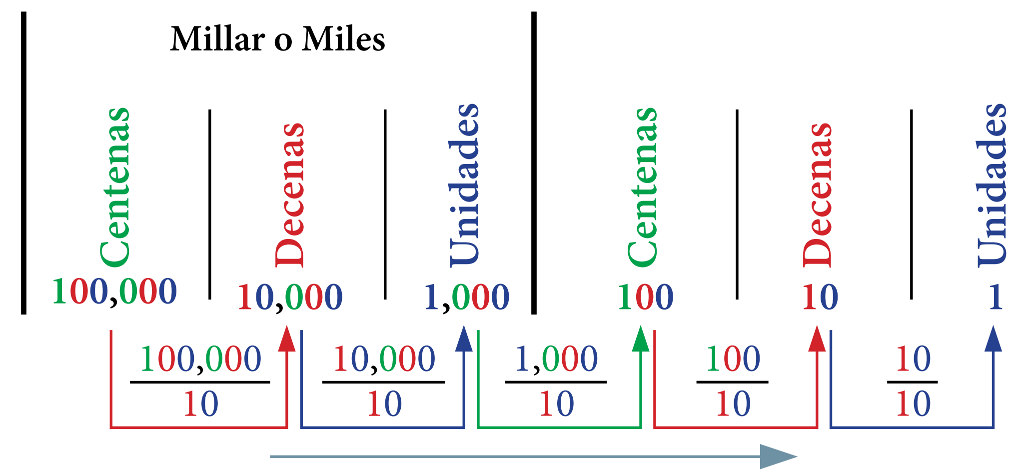


Recorriendo las columnas numéricas de *derecha* a *izquierda* **multiplicamos** por 10.

Recorrer las columnas numéricas de izquierda a derecha

Dividir entre 10

La división es la operación inversa de la multiplicación, por lo cual, al recorrer las columnas numéricas de izquierda a derecha, dividimos entre 10.



Recorriendo las columnas numéricas de *izquierda* a *derecha* **dividimos** entre 10.

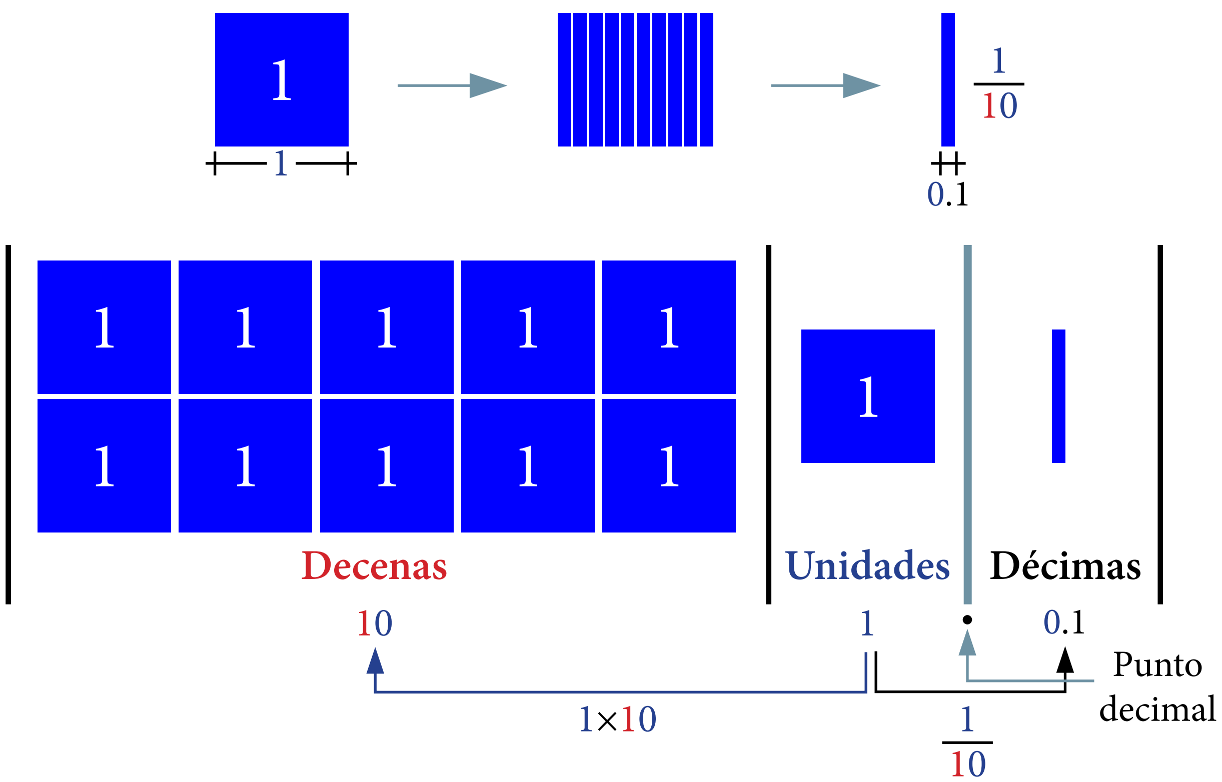
Crear columnas a la derecha de las unidades

Columna de las décimas

Si queremos crear una columna a la *derecha* de la columna de las unidades, recorremos las columnas numéricas de *izquierda* a *derecha*, por lo cual *dividimos* la unidad entre 10.

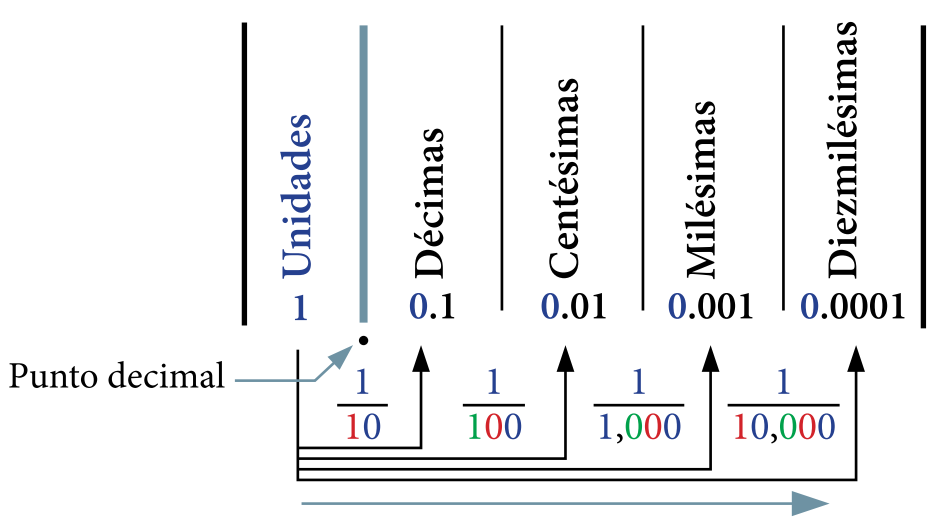
$$\frac{1}{10} = 0.1$$

Utilizando los conceptos de división y de fracción, hemos dividido en 10 partes iguales la unidad, cada parte es *una* de *diez* o 1 décimo de la unidad.



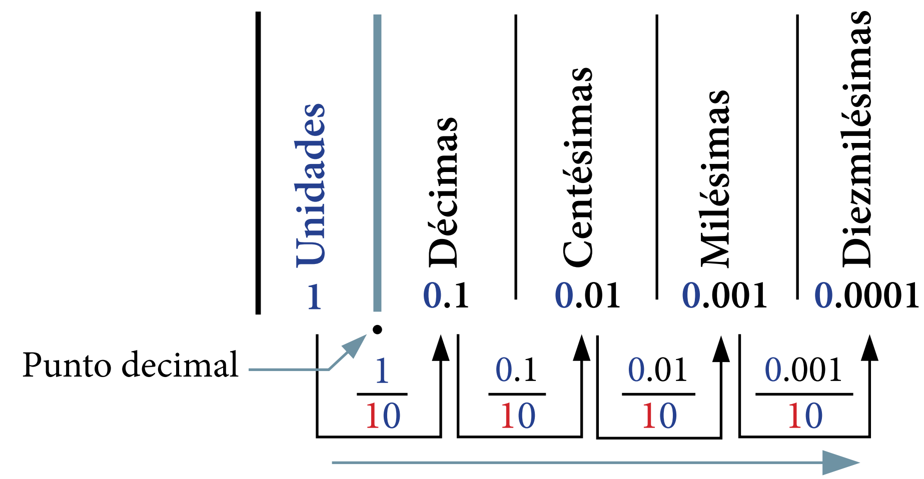
Punto decimal

El *punto decimal* nos permite diferenciar las columnas numéricas a la *izquierda* de la columna de las unidades y las columnas numéricas a la *derecha* de la columna de las unidades.



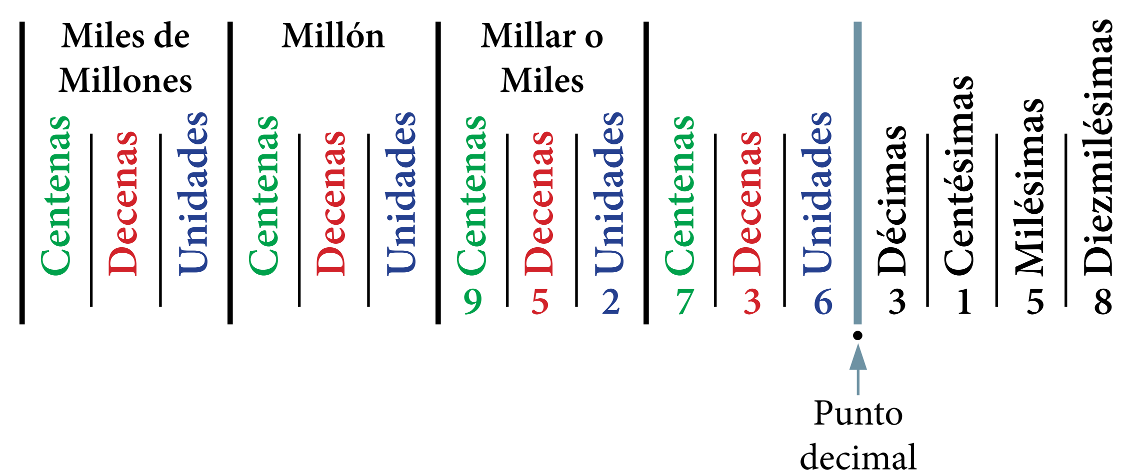
Recorriendo las columnas numéricas de *izquierda* a *derecha* **dividimos** entre 10.

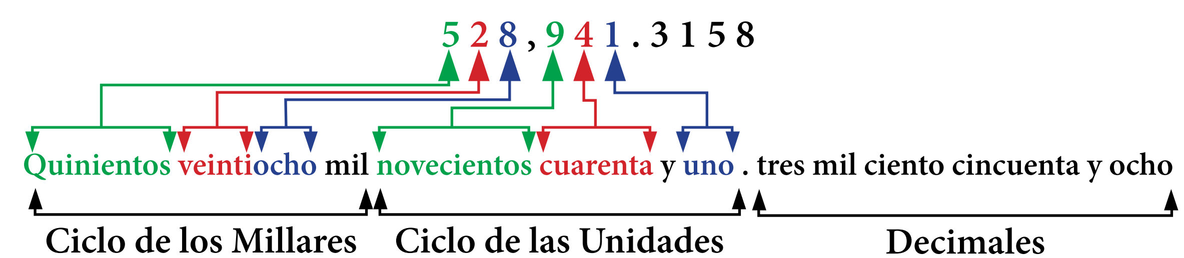
Utilizando notación decimal la división entre 10 podemos expresarla de la siguiente manera.



Columnas numéricas con decimales

A los dígitos a la *derecha* del punto decimal les llamamos *decimales*, porque al recorrer las columnas de *izquierda* a *derecha*, la unidad de la columna que se encuentra a la *derecha* es una *décima* de la unidad de la columna que se encuentra a la *izquierda*.





Todas las columnas numéricas, tanto a la derecha como a la izquierda del punto decimal, se comportan exactamente de la misma manera.

Cuarto Nivel de Abstracción

El número 1

Con el número 1 y la suma construimos los dígitos

Utilizando el dígito 1 y la operación *suma* hemos construido los otros ocho dígitos.

El dígito 1 es muy especial ya que junto con la operación *suma* crea los otros ocho dígitos.

Para indicar que no hay ningún objeto o dimensión, utilizamos el símbolo 0, al que llamamos cero.

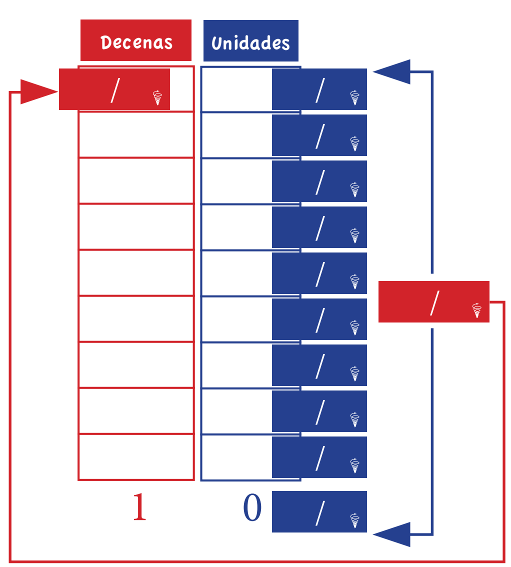
1
$1 + 1 = 2$
$1 + 1 + 1 = 3$
$1 + 1 + 1 + 1 = 4$
$1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$
$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6$
$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 7$
$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 8$
$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 9$

Dinámica básica del sistema de numeración decimal

Con el número 1 y las columnas numéricas construimos los números

En cada una de las columnas numéricas podemos *sumar* 1 nueve veces. Si *sumamos* otro 1, entonces formamos una nueva unidad, la cual movemos a la columna de la izquierda.

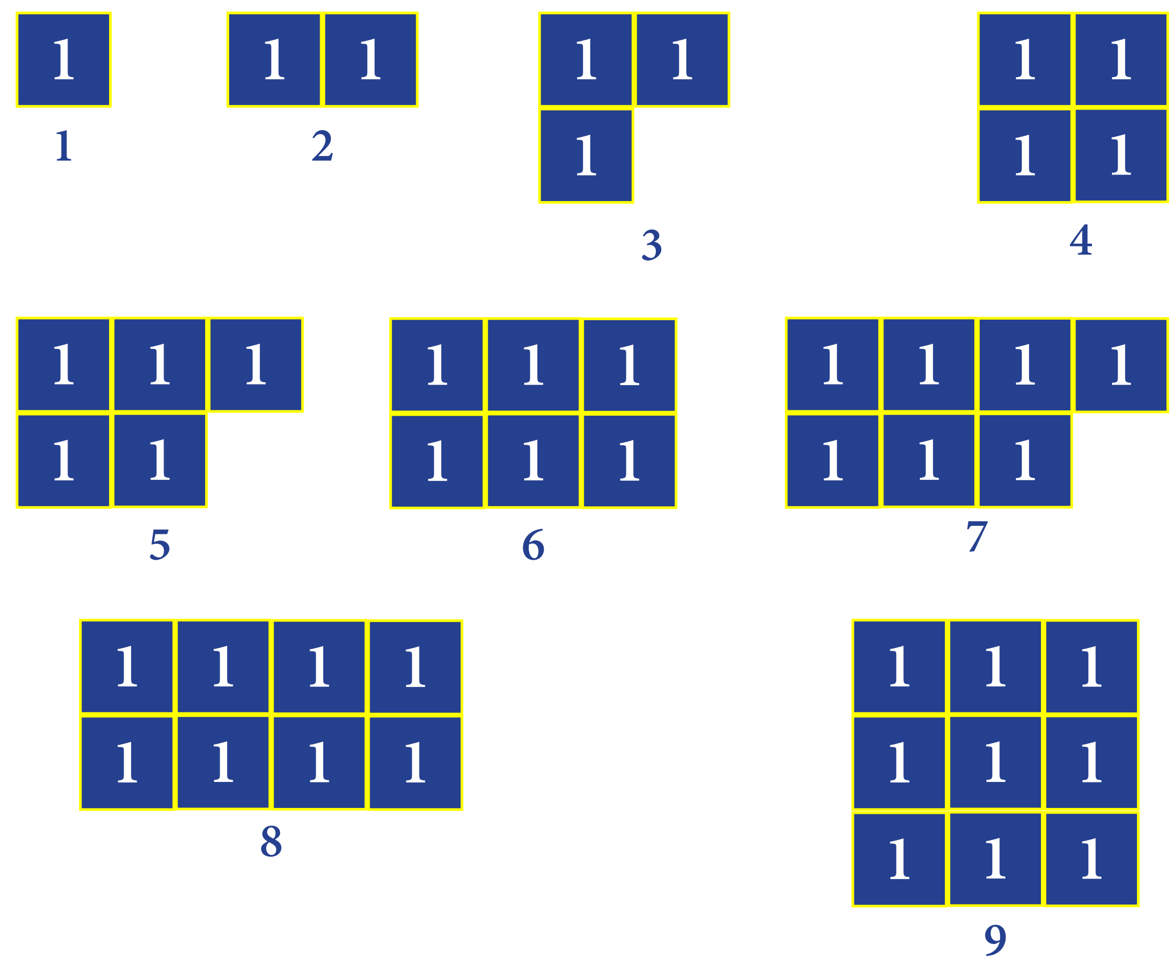
Lo que hemos hecho para crear todos los números es utilizar la dinámica básica del sistema de numeración decimal.



Representación geométrica de los nueve dígitos

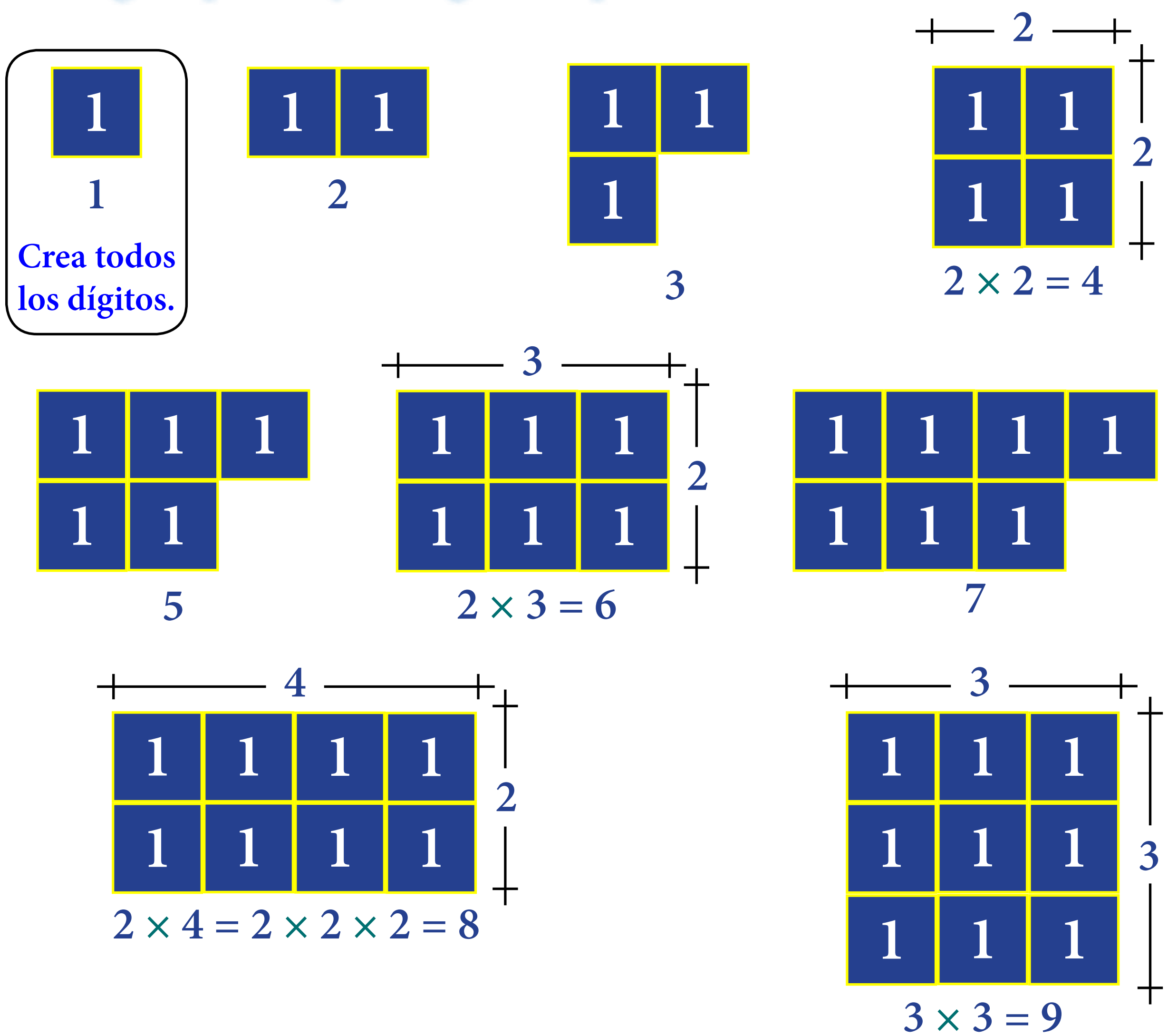
Los números representan objetos de la naturaleza. Vamos a utilizar el área de un cuadrado para representar el número 1.

Representamos los 9 dígitos utilizando cuadritos.



Descubrimos que *cuatro* de los *ocho* dígitos creados con el dígito 1 y la operación *suma*, que también pueden ser creados utilizando la operación *multiplicación*.

Los dígitos primos y los dígitos no primos



Descubrimos que los nueve dígitos pueden clasificarse en tres grupos.

Clasificación de los nueve dígitos

Los nueve dígitos se clasifican de la siguiente manera.

1. Dígito 1.

   Utilizando la operación *suma* genera todos los dígitos.

2. Dígitos Primos o Primarios: 2, 3, 5, 7.

   Solamente pueden ser creados utilizando el dígito 1 y la operación *suma*.

3. Dígitos No Primos o No Primarios: 4, 6, 8, 9.

   Pueden ser creados utilizando los dígitos primos 2 y 3 y la operación *multiplicación*.

Los números naturales

El conjunto de los números naturales, contiene aquellos números con los cuales contamos los objetos de la naturaleza.

El primer número natural es 1 y no se puede identificar el último número, ya que el conjunto es infinito, es decir, siempre es posible crear un número más, sumando 1.

Al igual que los ocho dígitos, algunos números naturales solamente pueden ser creados utilizando el *dígito* 1 y la operación *suma*, pero otros números naturales pueden ser creados también utilizando los *cuatro dígitos* primos y la operación *multiplicación*.

Clasificación de los números naturales

Los números naturales se clasifican de la siguiente manera.

1. Dígito 1.

   Utilizando la operación *suma* genera todos los números.

2. Números Primos o Primarios.

   Solamente pueden ser creados utilizando el *dígito* 1 y la operación *suma*.

3. Números No Primos o No Primarios.

   Pueden ser creados utilizando los *cuatro dígitos* primos y la operación *multiplicación*.

Los números primos y no primos

No es sencillo obtener una tabla de *números* primos porque no guardan una secuencia, ya que aparecen en forma irregular. Resulta más sencillo identificar a los *números* no primos, ya que sabemos que algunos se construyen multiplicando los *cuatro dígitos* primos.

Los dígitos primos o primarios que utilizamos para empezar a construir los números no primos son: 2, 3, 5, 7.

Vamos a utilizarlos para crear algunos *números* no primos.

$2 \times 5 = 10$	$5 \times 5 = 25$	$2 \times 19 = 38$
$2 \times 2 \times 3 = 12$	$2 \times 13 = 26$	$3 \times 13 = 39$
$2 \times 7 = 14$	$3 \times 3 \times 3 = 27$	$2 \times 2 \times 2 \times 5 = 40$
$3 \times 5 = 15$	$2 \times 2 \times 7 = 28$	$2 \times 3 \times 7 = 42$
$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$	$2 \times 3 \times 5 = 30$	$2 \times 2 \times 11 = 44$
$2 \times 3 \times 3 = 18$	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$	$3 \times 3 \times 5 = 45$
$2 \times 2 \times 5 = 20$	$3 \times 11 = 33$	$2 \times 23 = 46$
$3 \times 7 = 21$	$3 \times 17 = 34$	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 48$
$2 \times 11 = 22$	$5 \times 7 = 35$	$2 \times 5 \times 5 = 50$
$2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$	$2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$	$3 \times 17 = 51$

Utilizamos los *números* no primos que hemos creado para identificar los *números* primos del 1 al 50.

1	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	4	$\boxed{5}$	6	$\boxed{7}$	8	9	10
$\boxed{11}$	12	$\boxed{13}$	14	15	16	$\boxed{17}$	18	$\boxed{19}$	20
21	22	$\boxed{23}$	24	25	26	27	28	$\boxed{29}$	30
$\boxed{31}$	32	33	34	35	36	$\boxed{37}$	38	39	40
$\boxed{41}$	42	$\boxed{43}$	44	45	46	$\boxed{47}$	48	49	50

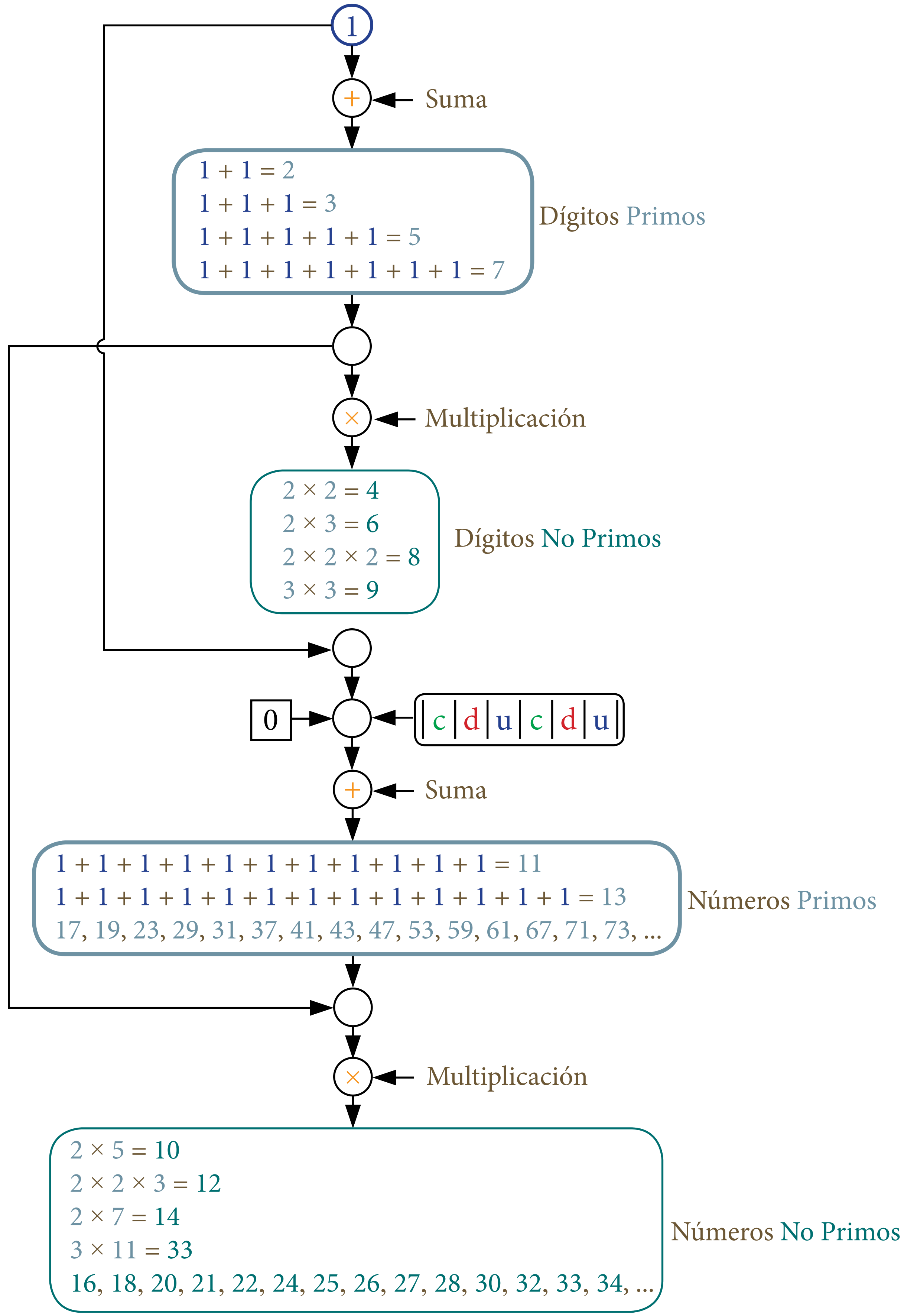
Todos los *números* primos los hemos creado con el *dígito* 1, las *columnas numéricas* y la *operación suma*.

$1 + 1 = 2$
$1 + 1 + 1 = 3$
$1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$
$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 7$
$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 11$
$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 13$
$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 17$
$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 19$

Teorema fundamental de la aritmética

Todos los *números* primos se crean con el *dígito* 1, las *columnas numéricas* y la operación *suma*.
Todos los *números* no primos se crean con los *números* primos y la operación *multiplicación*.

Árbol genealógico de los números naturales



Capítulo 2

Dinámica de los Números Naturales

Dinámica de los Números Fraccionarios

Clasificación de los Números Reales

Dinámica de los Números Reales Positivos

Cuarto Nivel de Abstracción

Introducción

Los conceptos previos necesarios para abordar la dinámica de los números reales positivos son: la clasificación de los nueve dígitos, la clasificación de los números naturales y el teorema fundamental de la aritmética.

Clasificación de los nueve dígitos

Los nueve dígitos se clasifican de la siguiente manera.

1. Dígito 1.

   Utilizando la operación *suma* genera todos los dígitos.

2. Dígitos Primos o Primarios: 2, 3, 5, 7.

   Solamente pueden ser creados utilizando el dígito 1 y la operación *suma*.

3. Dígitos No Primos o No Primarios: 4, 6, 8, 9.

   Pueden ser creados utilizando los dígitos primos 2 y 3 y la operación *multiplicación*.

Clasificación de los números naturales

Los números naturales se clasifican de la siguiente manera.

1. Números Primos o Primarios.

   Solamente pueden ser creados utilizando el *dígito* 1 y la operación *suma*.

2. Números No Primos o No Primarios.

   Pueden ser creados utilizando los *cuatro dígitos* primos y la operación *multiplicación*.

Teorema fundamental de la aritmética

Todos los *números* primos se crean con el *dígito* 1, las *columnas numéricas* y la operación *suma*.
Todos los *números* no primos se crean con los *números* primos y la operación *multiplicación*.

Factores primos de un número no primo

Los *números* primos que al multiplicarlos crean un *número* no primo se llaman los *factores* primos del número.

$2 \times 7 = 14 \leftarrow$ *Número* no primo

Factores primos

$2 \times 3 \times 7 = 42 \leftarrow$ *Número* no primo

Factores primos

$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32 \leftarrow$ *Número* no primo

Factores primos

Los factores primos dividen en forma exacta al número

Al multiplicar los *factores* primos creamos un *número* no primo por lo tanto, los *factores* primos dividen en forma exacta al *número* no primo.

$$2 \times 7 = 14 \rightarrow \frac{14}{7} = 2 \rightarrow \frac{14}{2} = 7$$

$$2 \times 3 \times 7 = 42 \rightarrow \frac{42}{2} = 21 \rightarrow \frac{42}{3} = 14 \rightarrow \frac{42}{7} = 6$$

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32 \rightarrow \frac{32}{2} = 16$$

Números divisibles entre 2

Utilizando como uno de los *factores* primos el *dígito* 2 para crear *números* no primos los *números* no primos creados son divisibles entre 2.

$2 \times 2 = 4$	$2 \times 5 = 10$	$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$	$2 \times 11 = 22$
$2 \times 3 = 6$	$2 \times 2 \times 3 = 12$	$2 \times 3 \times 3 = 18$	$2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$
$2 \times 2 \times 2 = 8$	$2 \times 7 = 14$	$2 \times 2 \times 5 = 20$	$2 \times 13 = 26$

Todos los *números* no primos creados son pares, por lo tanto todos los *números* pares son divisibles entre 2.

Números divisibles entre 3

Utilizando como uno de los *factores* primos el *dígito* 3 para crear *números* no primos los *números* no primos creados son divisibles entre 3.

$2 \times 3 = 6$	$3 \times 5 = 15$	$2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$	$3 \times 11 = 33$
$3 \times 3 = 9$	$2 \times 3 \times 3 = 18$	$3 \times 3 \times 3 = 27$	$2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$
$2 \times 2 \times 3 = 12$	$3 \times 7 = 21$	$2 \times 3 \times 5 = 30$	$3 \times 13 = 39$

Analizando con detenimiento los *números* no primos que hemos creado, nos damos cuenta que la suma de los *dígitos* que forman el *número* no primo es divisible entre 3.

$2 \times 3 = 6 \rightarrow \frac{6}{3} = 2$ $\qquad$ $2 \times 2 \times 3 = 12 \rightarrow 1 + 2 = 3 \rightarrow \frac{3}{3} = 1$

$3 \times 3 = 9 \rightarrow \frac{9}{3} = 3$ $\qquad$ $3 \times 5 = 15 \rightarrow 1 + 5 = 6 \rightarrow \frac{6}{3} = 2$

$2 \times 3 \times 3 = 18 \rightarrow 1 + 8 = 9 \rightarrow \frac{9}{3} = 3$

Números divisibles entre 5

Utilizando como uno de los *factores* primos el *dígito* 5 para crear *números* no primos los *números* no primos creados son divisibles entre 5.

$2 \times 5 = 10$	$5 \times 5 = 25$	$2 \times 2 \times 2 \times 5 = 40$	$5 \times 11 = 55$
$3 \times 5 = 15$	$2 \times 3 \times 5 = 30$	$3 \times 3 \times 5 = 45$	$2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$
$2 \times 2 \times 5 = 20$	$5 \times 7 = 35$	$2 \times 5 \times 5 = 50$	$5 \times 13 = 65$

Todos los *números* no primos creados terminan en 0 o en 5, por lo tanto todos los *números* no primos que terminan en 0 o en 5 son divisibles entre 5.

Números divisibles entre 6

Utilizando como dos de los *factores* primos el *dígito* 2 y el *dígito* 3 para crear *números* no primos los *números* no primos creados son divisibles entre 6.

$2 \times 3 = 6$	$2 \times 3 \times 3 = 18$	$2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$	$2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$
$2 \times 2 \times 3 = 12$	$2 \times 3 \times 5 = 30$	$2 \times 3 \times 7 = 42$	$2 \times 3 \times 3 \times 5 = 90$

Cuando el *número* no primo es par y la *suma* de los *dígitos* que lo forman es divisible entre 3 el *número* no primo es divisible entre 2, 3 y 6.

Números divisibles entre 9

Utilizando dos veces como *factor* primo el *dígito* 3 para crear *números* no primos los *números* no primos creados son divisibles entre 3.

$3 \times 3 = 9$	$3 \times 3 \times 3 = 27$	$2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$	$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$
$2 \times 3 \times 3 = 18$	$3 \times 3 \times 5 = 45$	$2 \times 3 \times 3 \times 3 = 54$	$3 \times 3 \times 3 \times 5 = 135$

Cuando la *suma* de los *dígitos* que forman un *número* no primo es divisible entre 9 el *número* no primo es divisible entre 3 y entre 9.

Números divisibles entre 10

Utilizando como dos de los *factores* primos el *dígito* 2 y el *dígito* 5 para crear *números* no primos los *números* no primos creados son divisibles entre 10.

$2 \times 5 = 10$	$2 \times 3 \times 5 = 30$	$2 \times 5 \times 5 = 50$	$2 \times 5 \times 7 = 70$
$2 \times 2 \times 5 = 20$	$2 \times 2 \times 2 \times 5 = 40$	$2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$	$2 \times 3 \times 5 \times 5 = 150$

Cuando el *número* no primo termina en 0 el *número* no primo es divisible entre 2, 5 y 10.

Resumen de la divisibilidad de los números no primos

Divisible Entre	Característica
2	Número par.
3	La *suma* de los dígitos que lo forma es divisible entre 3.
5	Número que *termina* en 0 o en 5.
2, 3 y 6	Número par y la *suma* de los dígitos que lo forman es divisible entre 3.
3 y 9	La *suma* de los dígitos que lo forman es divisible entre 9.
2, 5 y 10	Número que *termina* en 0.

Números pares y números impares

La primer clasificación de los *números* es en pares e impares, dependiendo de son divisibles entre 2 o no.

1. Números Pares.

   Todos los números que son *divisibles* entre 2.

2. Números Impares.

   Todos los números que *no* son *divisibles* entre 2.

Descomponer un número no primo en sus factores primos

Los números no primos los creamos multiplicando *números* primos a los que llamamos *factores* primos del *número*.

La división es la operación inversa de la multiplicación, por lo cual los *factores* primos que componen un número lo dividen en forma exacta.

Descomponer un *número* en sus *factores* primos, consiste en utilizar la división para encontrar los *factores* primos que lo componen.

Algoritmo para descomponer un número no primo en sus factores primos

El algoritmo consiste en un procedimiento lógico y ordenado de seis pasos.

1. Escribir el *número* no primo y frente a él una raya vertical.
2. Encontrar el *número* primo mas pequeño que divide al *número* no primo en forma exacta. Escribir este *número* primo a la derecha de la raya vertical.
3. Dividir el *número* no primo entre el *número* primo y escribir el resultado debajo del *número* no primo.
4. Encontrar el *número* primo más pequeño que divide al *número* no primo del paso 3. Escribir este *número* primo a la derecha de la raya vertical.
5. Dividir el *número* no primo entre el *número* primo y escribir el resultado debajo del *número* no primo.
6. Repetir el procedimiento tantas veces como sea necesario hasta que el resultado de la división sea 1.

		÷	
Número no primo →	54	2	← *Factor* primo
Resultado de la división →	27	3	← *Factor* primo
Resultado de la división →	9	3	← *Factor* primo
Resultado de la división →	3	3	← *Factor* primo
Uno →	1		

Los *factores* primos que crean el *número* son: $2 \times 3 \times 3 \times 3 = 54$

Número no primo →	252	2	← *Factor* primo
Resultado de la división →	126	2	← *Factor* primo
Resultado de la división →	63	3	← *Factor* primo
Resultado de la división →	21	3	← *Factor* primo
Resultado de la división →	7	7	← *Factor* primo
Uno →	1		

Los *factores* primos que crean el *número* son: $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7 = 252$

Los factores primos y la divisibilidad de un número

Todos los *factores* primos que forman un *números* no primos lo dividen en forma exacta. Todos los *números* no primos formados de la multiplicación de dos o más *factores* primos, también lo dividen en forma exacta.

Esta propiedad de los *factores* primos que forman un *número* no primo, es muy importante para entender y demostrar el concepto del mínimo común múltiplo, o mínimo común denominador.

Los *factores* primos que crean el *número* no primo 54 son: 2, 3, 3 y 3. Los *números* no primos formados de las posibles multiplicaciones de dos o más *factores* primos son:

$2 \times 3 = 6 \qquad 3 \times 3 = 9 \qquad 2 \times 3 \times 3 = 18 \qquad 3 \times 3 \times 3 = 27$

Estos *números* no primos, también dividen en forma exacta 54.

$$\frac{54}{6} = 9 \qquad \frac{54}{9} = 6 \qquad \frac{54}{18} = 3 \qquad \frac{54}{27} = 2$$

Los *factores* primos que crean el *número* no primo 252 son: 2, 2, 3, 3 y 7. Los *números* no primos formados de las posibles multiplicaciones de dos o más *factores* primos son:

$2 \times 2 = 4$	$2 \times 7 = 14$	$2 \times 2 \times 7 = 28$	$2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$
$2 \times 3 = 6$	$3 \times 7 = 21$	$2 \times 3 \times 3 = 18$	$2 \times 2 \times 3 \times 7 = 84$
$3 \times 3 = 9$	$2 \times 2 \times 3 = 12$	$3 \times 3 \times 7 = 63$	$2 \times 3 \times 3 \times 7 = 126$

Estos *números* no primos, también dividen en forma exacta 252.

$$\frac{252}{4} = 63 \qquad \frac{252}{12} = 21 \qquad \frac{252}{21} = 12 \qquad \frac{252}{63} = 4$$

$$\frac{252}{6} = 42 \qquad \frac{252}{14} = 18 \qquad \frac{252}{28} = 9 \qquad \frac{252}{84} = 3$$

$$\frac{252}{9} = 28 \qquad \frac{252}{18} = 14 \qquad \frac{252}{36} = 7 \qquad \frac{252}{126} = 2$$

Los múltiplos de un número

Cuando un número lo multiplicamos por otros números, obtenemos múltiplos de ese número.

Por ejemplo, el número lo multiplicamos por 2, 3, 4, 5, etc.

		×2	×3	×4	×5	×6	×7	×8	×9	×10
Los múltiplos de 2 son:	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Los múltiplos de 3 son:	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
Los múltiplos de 5 son:	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
Los múltiplos de 7 son:	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70

El común múltiplo de dos o más números

Aquellos múltiplos que son los mismos en dos o más números les llamamos común múltiplos.

Por ejemplo, los común múltiplos de 2 y 3 se obtienen de la siguiente manera:

2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30

Los común múltiplos de 2 y 3 son: 6, 12 y 18.

Los común múltiplos los creamos multiplicando un número por otros números, por lo tanto, todos los común múltiplos son divisibles entre el número que los genera.

$$\frac{6}{2} = 3 \qquad \frac{12}{2} = 6 \qquad \frac{18}{2} = 9$$

$$\frac{6}{3} = 2 \qquad \frac{12}{3} = 4 \qquad \frac{18}{3} = 6$$

Los común múltiplos de 2 y 5 se obtienen de la siguiente manera:

2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50

Los común múltiplos de 2 y 5 son: 10 y 20.

Los común múltiplos los creamos multiplicando un número por otros números, por lo tanto, todos los común múltiplos son divisibles entre el número que los genera.

$$\frac{10}{2} = 5 \qquad \frac{10}{5} = 2 \qquad \frac{20}{2} = 10 \qquad \frac{20}{5} = 4$$

Vamos a encontrar los común múltiplos de: 4, 6 y 9. Los tres números son no primos.

Multiplicamos los números por 2, 3, 4, 5, etc.

		×2	×3	×4	×5	×6	×7	×8	×9	×10
Los múltiplos de 4 son:	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
Los múltiplos de 6 son:	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
Los múltiplos de 9 son:	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90

El común múltiplo de: 4, 6 y 9 es 36.

Los común múltiplos de: 4 y 6 son 12 y 36.

Los común múltiplos de: 6 y 9 son 36 y 54.

Los común múltiplos los creamos multiplicando un número por otros números, por lo tanto, 36 se divide en forma exacta entre: 4, 6 y 9.

$$\frac{36}{4} = 9 \qquad \frac{36}{6} = 6 \qquad \frac{36}{9} = 4$$

Encontrar los común múltiplos de varios números siguiendo esta forma, puede resultar ser muy laborioso y tardado, ya que primero debemos encontrar los múltiplos de los números y después identificar aquellos que son comunes.

De los común múltiplos que hemos encontrado nos damos cuenta que hay uno que es el número más pequeño, a ese le llamamos el mínimo común múltiplo, el cual identificamos con las siglas: mcm.

El mínimo común múltiplo

Los común múltiplos de 2 y 3 que hemos localizado son: 6, 12 y 18.

2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30

El común múltiplo más pequeño.

El más pequeño de los tres es 6, por lo tanto el *mínimo* común múltiplo de 2 y 3 es 6.

Desarrollo de una estrategia para encontrar el mínimo común múltiplo

Cuando un número lo multiplicamos por otros números, obtenemos múltiplos de ese número.

Vamos a aplicar el concepto de los *factores* primos para crear una estrategia que nos permita conocer el *mínimo* común múltiplo de manera más sencilla.

Los común múltiplos de 4, 6 y 9 son:

4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90

El común múltiplo más pequeño.

Los factores primos de 4, 6 y 9 son:

$$4 = 2 \times 2 \qquad 6 = 2 \times 3 \qquad 9 = 3 \times 3$$

Si tomamos el *mínimo* número de los *factores* primos que son comunes a 4, 6 y 9, creamos un común múltiplo que es el *mínimo*.

$$4 = 2 \times 2 \qquad 6 = 2 \times 3 \qquad 9 = 3 \times 3$$

El *mínimo* número de *factores* primos que son comunes a 4, 6 y 9.

El mínimo común múltiplo de 4, 6 y 9 es:

$$\text{mcm} = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$$

Para desarrollar nuestra estrategia para encontrar el *mínimo* común múltiplo utilizando los *factores* primos vamos hacer otro ejemplo.

Primero vamos a calcular los múltiplos de 8, 12 y 18.

		×2	×3	×4	×5	×6	×7	×8	×9	×10
Los múltiplos de 8 son:	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
Los múltiplos de 12 son:	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120
Los múltiplos de 18 son:	18	36	54	72	90	108	126	144	162	180

El común múltiplo más pequeño.

Los *factores* primos de 8, 12 y 18 son:

$$\begin{array}{r|l} 8 & 2\\ 4 & 2\\ 2 & 2\\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 12 & 2\\ 6 & 2\\ 3 & 3\\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 18 & 2\\ 9 & 3\\ 3 & 3\\ 1 & \end{array}$$

$8 = 2 \times 2 \times 2$ $\qquad 12 = 2 \times 2 \times 3$ $\qquad 18 = 2 \times 3 \times 3$

Si tomamos el *mínimo* número de los *factores* primos que son comunes a 8, 12 y 18, creamos un común múltiplo que es el *mínimo*.

$8 = 2 \times 2 \times 2$ $\qquad 12 = 2 \times 2 \times 3$ $\qquad 18 = 2 \times 3 \times 3$

El *mínimo* número de *factores* primos que son comunes a 8, 12 y 18.

El mínimo común múltiplo de 8, 12 y 18 es:

$$\text{mcm} = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 72$$

Observando con detenimiento los ejemplos anteriores, nos damos cuenta que con el *mínimo* número de *factores* primos comunes que hemos escogido podemos construir los tres números.

$$12 = 2 \times 2 \times 3$$

$$\text{mcm} = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 72$$

$8 = 2 \times 2 \times 2$ $\qquad 18 = 2 \times 3 \times 3$

Algoritmo para encontrar el mínimo común múltiplo

Resulta sencillo crear un algoritmo para encontrar el mínimo común múltiple.

1. Descomponer los *números* en sus *factores* primos.
2. Si alguno de los *factores* primos se repite en el mismo *número*, se cuenta cuántas veces se repite.
3. De los *factores* primos que se repiten en el mismo *número*, se escoge el grupo que se repite más veces.
4. De los *factores* primos que no se repiten en el mismo *número*, se elije un representante de cada uno de ellos.
5. El mínimo común múltiplo –*mcm*– es el producto de los *factores* primos seleccionados.

Para practicar el algoritmo que hemos creado, vamos a calcular el mínimo común múltiplo de: 9, 15, 60, 90.

1. Descomponer los *números* en sus *factores* primos.

$$\begin{array}{r|l} 9 & 3\\ 3 & 3\\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 15 & 3\\ 5 & 5\\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 60 & 2\\ 30 & 2\\ 15 & 3\\ 5 & 5\\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 90 & 2\\ 45 & 3\\ 15 & 3\\ 5 & 5\\ 1 & \end{array}$$

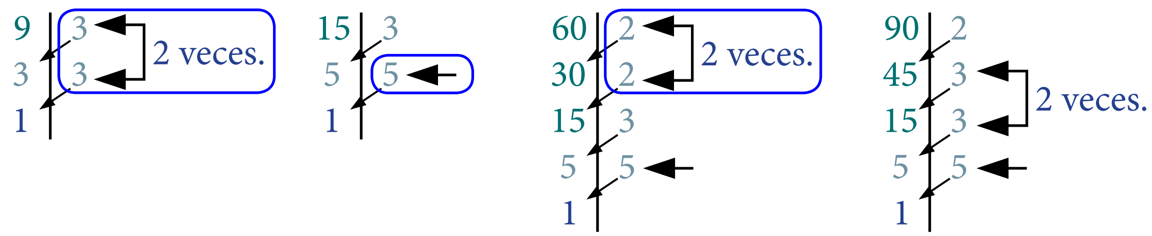
2. Si alguno de los *factores* primos se repite en el mismo *número* se cuenta cuántas veces se repite.

$$\begin{array}{r|l} 9 & 3\\ 3 & 3\\ 1 & \end{array}\ \text{2 veces.} \qquad \begin{array}{r|l} 15 & 3\\ 5 & 5\\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 60 & 2\\ 30 & 2\\ 15 & 3\\ 5 & 5\\ 1 & \end{array}\ \text{2 veces.} \qquad \begin{array}{r|l} 90 & 2\\ 45 & 3\\ 15 & 3\\ 5 & 5\\ 1 & \end{array}\ \text{2 veces.}$$

3. De los *factores* primos que se repiten en el mismo *número* se escoge el grupo que se repite más veces.

$$\begin{array}{r|l} 9 & 3\\ 3 & 3\\ 1 & \end{array}\ \boxed{\text{2 veces.}} \qquad \begin{array}{r|l} 15 & 3\\ 5 & 5\\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 60 & 2\\ 30 & 2\\ 15 & 3\\ 5 & 5\\ 1 & \end{array}\ \boxed{\text{2 veces.}} \qquad \begin{array}{r|l} 90 & 2\\ 45 & 3\\ 15 & 3\\ 5 & 5\\ 1 & \end{array}\ \text{2 veces.}$$

4. De los *factores* primos que no se repiten en el mismo *número*, se elije un representante de cada uno de ellos.



5. El mínimo común múltiplo –*mcm*– es el producto de los *factores* primos seleccionados.

$\text{mcm} = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 180$

Conclusión de la dinámica de los números naturales

Los nueve dígitos los hemos clasificado en tres categorías: el 1 que podemos considerar el *origen* de todos los números cuando lo combinamos con la operación *suma*; el 2, 3, 5 y 7 que llamamos primos o primarios, ya que solamente pueden ser creados utilizando el dígito 1 y la operación *suma*; el 4, 6, 8 y 9 que llamamos no primos y pueden ser creados utilizando los dígitos primos y la operación *multiplicación*.

Siguiendo la dinámica de los nueve dígitos, todos los números naturales los hemos clasificado en dos categorías: primos o primarios, ya que solamente pueden ser creados utilizando el dígito 1 y la operación *suma*; no primos aquellos que pueden crearse con los números primos y la operación *multiplicación*.

De esta clasificación de los números naturales en primos o primarios y en no primos pudimos enunciar el *Teorema Fundamental de la Aritmética*.

Una vez que hemos entendido y demostrado estos conceptos, los aplicamos para descomponer números en sus *factores* primos y establecer criterios para la divisibilidad de los números.

Estudiamos el concepto de los *múltiplos* de un número y de los *común múltiplos* de varios números.

Utilizando los conceptos de los *factores* primos o primarios y del *común múltiplo* creamos un algoritmo para encontrar en forma sencilla, lógica y ordenada el mínimo común múltiplo –*mcm*–.

Dinámica de los Números Fraccionarios

Primero al Quinto Niveles de Abstracción

Introducción

Utilizando los nueve dígitos y las operaciones *suma* y *multiplicación* –*Teorema Fundamental de la Aritmética*– hemos construido los números *naturales*, ahora vamos a utilizar la operación *división* para crear los números *fraccionarios*.

Concepto de fracción

Una fracción consiste en dividir –fraccionar– una unidad en partes iguales en tamaño y forma.

Concepto de unidad

En el *primero* y *segundo* niveles de abstracción la *unidad* de una fracción es una figura geométrica.

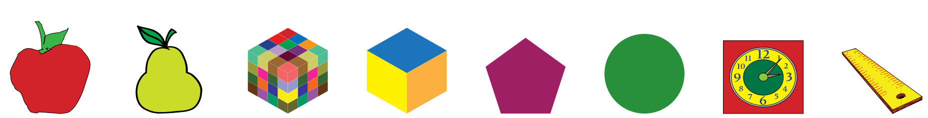
En el *tercero* y *cuarto* niveles de abstracción la *unidad* de una fracción es una figura geométrica y una unidad de medición: tiempo, distancia, área y volumen.

En el *quinto* nivel de abstracción estudiamos que la *unidad* de una fracción puede ser *simple* o *compuesta*.

Unidad simple

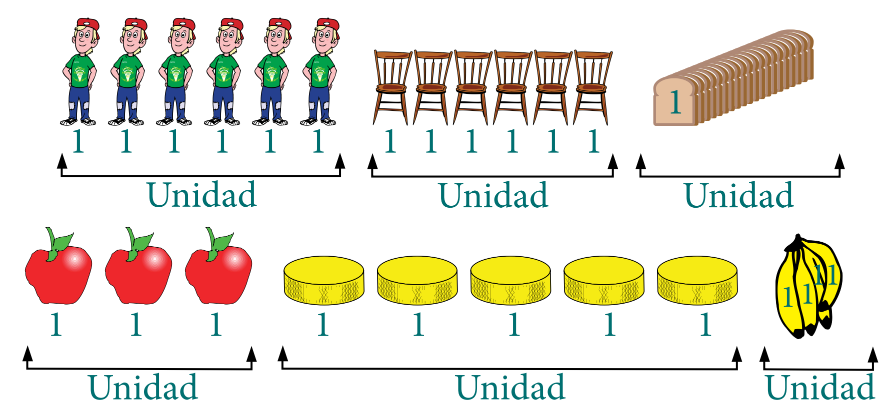
La unidad de una fracción es *simple* cuando el número que fraccionamos es 1, 1 objeto, 1 figura geométrica o 1 unidad de medición.

Del *primero* al *cuarto* niveles de abstracción hemos utilizado únicamente *unidades simples*.

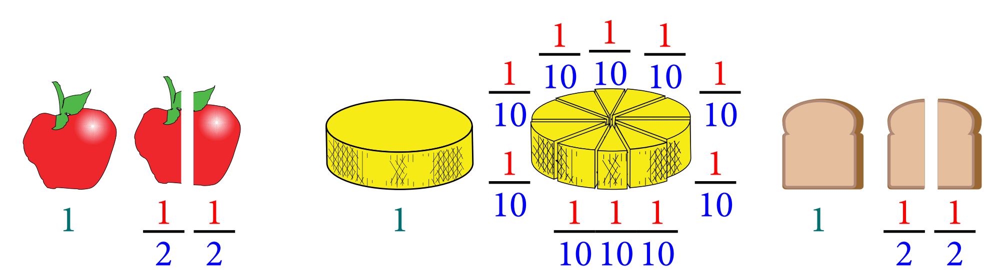


Unidad compuesta

La unidad de una fracción es *compuesta* cuando el *número* o el *conjunto* de objetos que fraccionamos es *mayor* a 1.



Cada uno de los elementos de la *unidad compuesta* puede también ser dividido en fracciones.

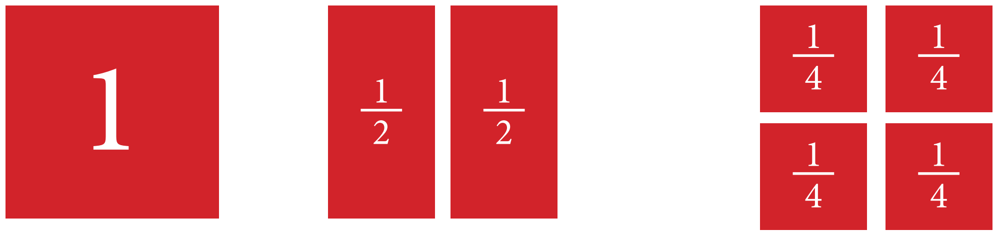


Una vez que dividimos en fracciones los elementos de la *unidad compuesta*, cada uno de los elementos es una *unidad simple*.

Por esta razón un problema en el que la *unidad* es *compuesta* y a su vez sus elementos están divididos en fracciones, en este problema se combinan la *unidad compuesta* con una *unidad simple* repetida varias.

Notación de fracción

Para explicar claramente el valor de una fracción necesitamos dos términos: un término que especifique en cuántas partes hemos dividido la unidad –*denominador*– y otro término que especifique cuántas fracciones o partes de ese total hemos tomado –*numerador*–.

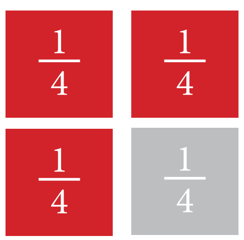


Unidad **2 Fracciones** **4 Fracciones**

Numerador. → 1 ← 1 Fracción.
Denominador. → 2 ← De 2 fracciones.

1 ← 1 Fracción.
4 ← De 4 fracciones.

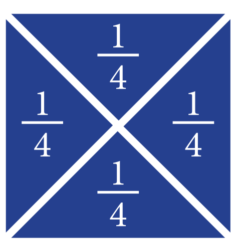
Numerador. → 1 ← Especifica cuántas partes del total de partes hemos tomado.
Denominador. → 2 ← Especifica en cuántas partes hemos dividido la unidad.



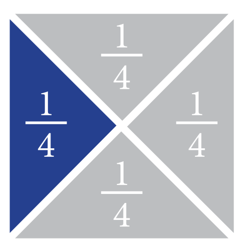
3 ← Cuántas partes del total de partes hemos tomado.
4 ← En cuántas partes hemos dividido la unidad.

Las fracciones tienen que ser del mismo tamaño y forma.

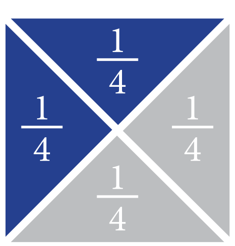
Unidad



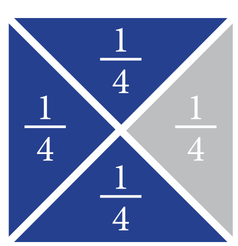
4 Fracciones



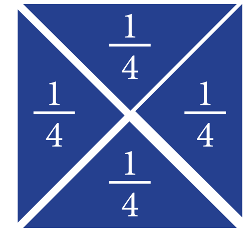
1 ← 1 Fracción.
4 ← De 4 fracciones.



2 ← 2 Fracciones.
4 ← De 4 fracciones.



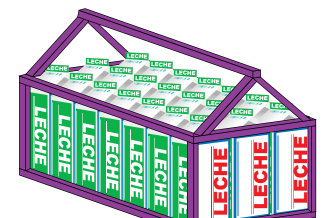
3 ← 3 Fracciones.
4 ← De 4 fracciones.



4 Fracciones. → 4
De 4 fracciones. → 4 = 1 ← Unidad.

Notación de fracción cuando la unidad es compuesta

Si la unidad es *compuesta*, debemos claramente especificar en cuántas partes la dividimos y de ese total de partes cuántas partes tomamos.



Unidad

Unidad = 21 litros de leche.

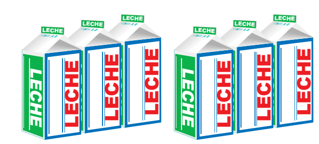
Dividimos la unidad en siete partes del mismo tamaño.

$\frac{1}{7}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{7}$

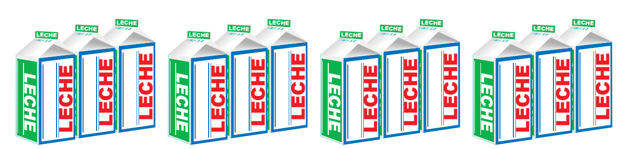
1 ← 1 Fracción.
7 ← De 7 fracciones.

Unidad = 21 litros de leche.

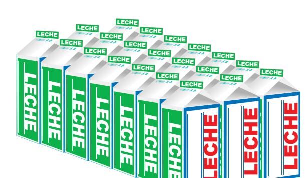
$\frac{1}{7}$ = 3 litros de leche.



$\frac{2}{7}$ = 6 litros de leche.



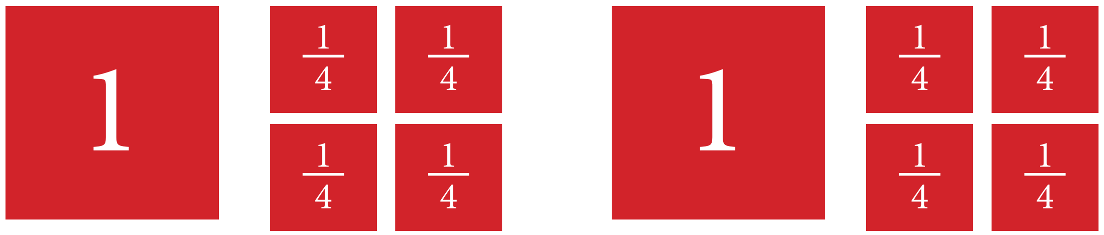
$\frac{4}{7}$ = 12 litros de leche.



$\frac{7}{7}$ = 1 Unidad = 21 litros de leche.

Unidad simple repetida varias veces

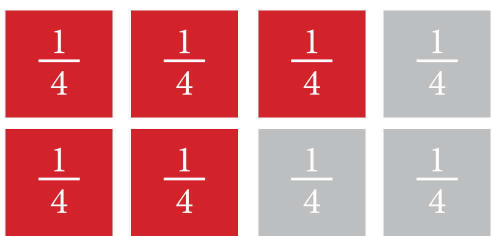
La misma *unidad*, *repetida* varias veces, podemos dividirla o fraccionarla en partes iguales y tomar fracciones que comprendan más de una unidad.



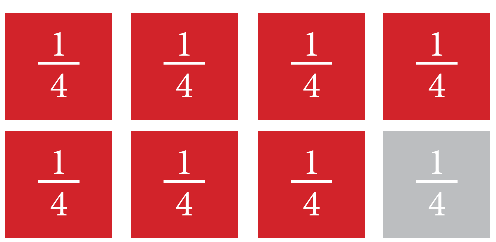
Unidad — 4 Fracciones — Unidad — 4 Fracciones

1 Unidad $= \frac{4}{4}$

2 Unidades $= \frac{8}{4}$ ← 8 Fracciones. ← De 4 fracciones de cada unidad.

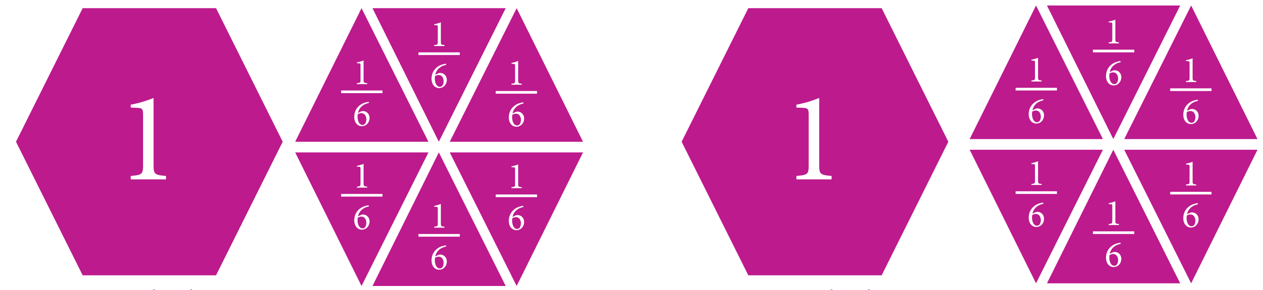


$\frac{5}{4}$ ← 5 Fracciones. ← De 4 fracciones de cada unidad.

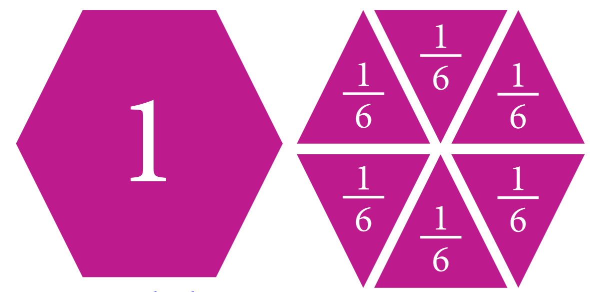


$\frac{7}{4}$ ← 7 Fracciones. ← De 4 fracciones de cada unidad.

Es muy importante *no confundir* fracciones de una *unidad compuesta* y fracciones de una *unidad repetida* varias veces.



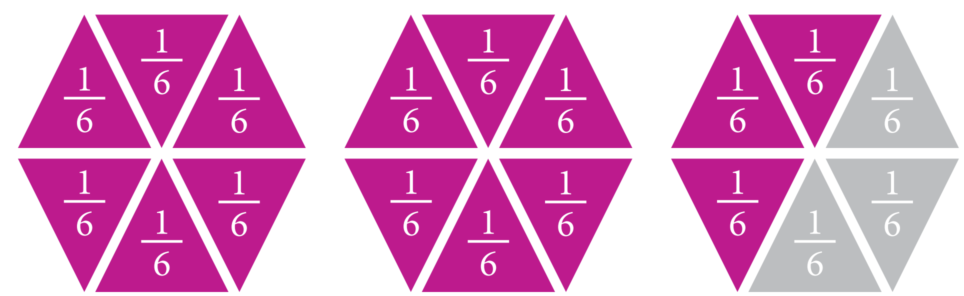
Unidad — Unidad



Unidad

1 Unidad $= \frac{6}{6}$

3 Unidades $= \frac{18}{6}$ ← 18 Fracciones. ← De 6 fracciones de cada unidad.



$\frac{15}{6}$ ← 15 Fracciones. ← De 6 fracciones de cada unidad.

Fracciones impropias

Cuando en una fracción el numerador es *mayor* que el denominador sabemos que la fracción procede de una *unidad repetida* varias veces.

Cuando el *numerador* de una fracción es *mayor* que el denominador, a la fracción le llamamos *fracción impropia*.

$\frac{18}{6} \leftarrow$ Mayor que el denominador. $\rightarrow \frac{15}{6}$

Fracciones impropias.

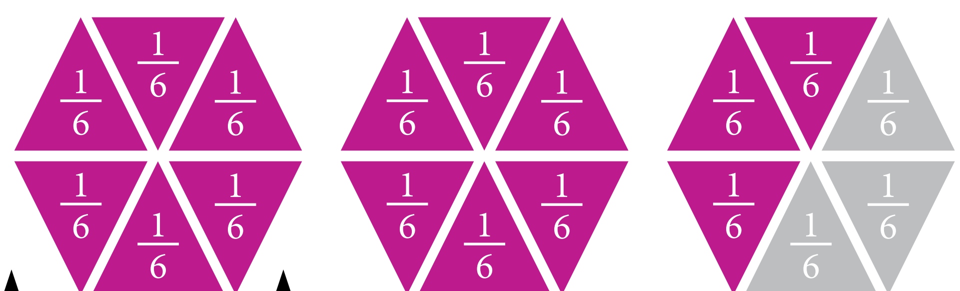
Como sabemos que una fracción *impropia* procede de una *unidad repetida* varias veces, podemos determinar de *cuántas* unidades procede.

El *denominador* indica el número de fracciones en las cuales la *unidad* está dividida.

$\frac{15}{6}$

$6 \leftarrow$ Cada una de las unidades está dividida en 6 fracciones.

$15 \rightarrow$ El numerador indica cuántas fracciones hemos tomado.



$\frac{6}{6} = 1 \leftarrow$ Unidad.

$\frac{12}{6} = 2 \leftarrow$ Unidades.

$\frac{15}{6}$

Descomponemos el numerador en las unidades que podemos formar de acuerdo a lo que indica el denominador.

$$\frac{15}{6} = \frac{12+3}{6} = \frac{12}{6} + \frac{3}{6} = \underbrace{2}_{\text{2 Unidades.}} + \frac{3}{6}$$

Fracciones impropias en notación mixta

La fracción impropia la podemos expresar como la suma de un número entero más una fracción *no impropia*, es decir *propia*.

Cuando una *fracción impropia* la expresamos como la *suma* de un *número entero* y una *fracción propia* le llamamos *notación mixta*.

Le llamamos notación *mixta* porque hemos mezclado un número *entero* con una *fracción*.

$$\frac{15}{6} = \underbrace{2}_{\text{Entero.}} + \underbrace{\frac{3}{6}}_{\text{Fracción.}}$$

En matemáticas nos gusta escribir las expresiones en la forma más compacta posible, por eso no escribimos el signo más, pero sabemos que es una suma.

$$\frac{15}{6} = 2\,\frac{3}{6}$$

Utilizando el concepto de fracciones equivalentes, simplificamos la fracción.

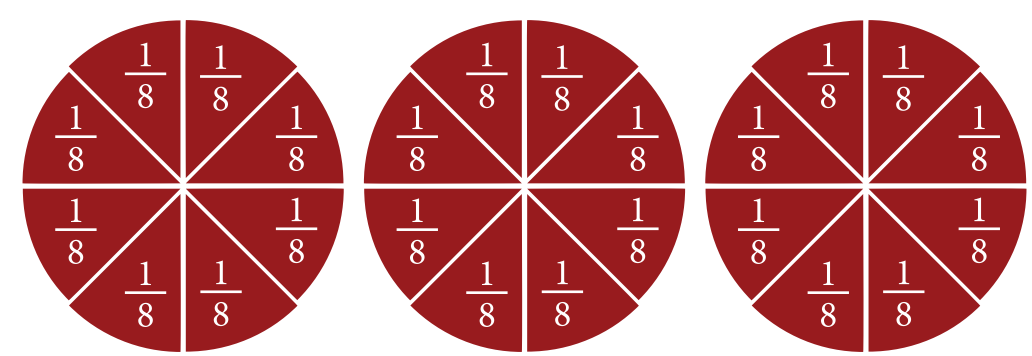
Dividimos entre 3.

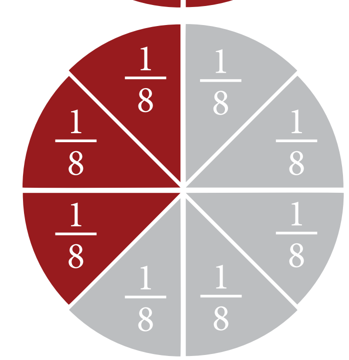
$$\frac{\cancel{3}^{\,1}}{\cancel{6}_{\,2}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{15}{6} = 2\,\frac{3}{6} = 2\,\frac{1}{2}$$

Cuando una *fracción impropia* está expresada en notación mixta, podemos convertirla en notación de fracción haciendo el proceso inverso.

La fracción impropia en notación mixta: $3\,\frac{3}{8} = 3 + \frac{3}{8}$





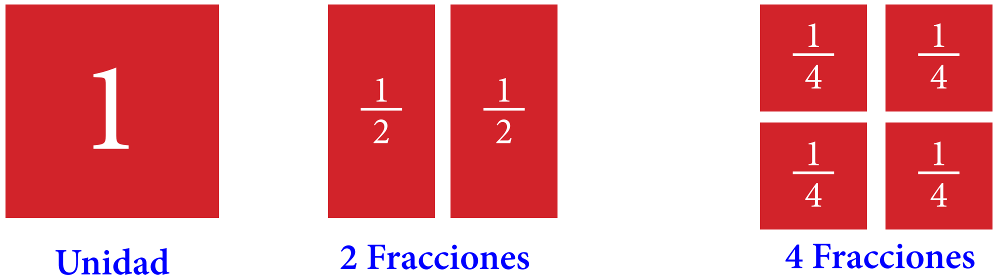
$\frac{8}{8} = 1$ Unidad.

$\frac{24}{8} = 3$ Unidades.

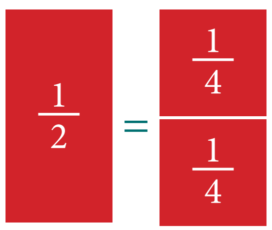
$$3\,\frac{3}{8} = 3 + \frac{3}{8} = \frac{24}{8} + \frac{3}{8} = \frac{27}{8}$$

Fracciones equivalentes

Una *unidad*, podemos fraccionarla de muchas maneras diferentes. Por ejemplo, en medios y en cuartos.



Nos damos cuenta que *un medio* es equivalente a *dos cuartos* ya que representan exactamente la misma área.



$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$

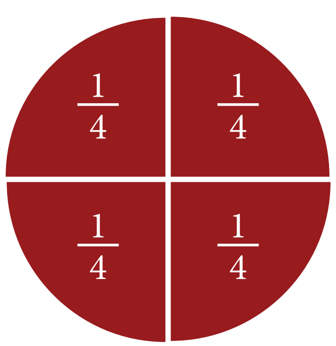
Cuando dos fracciones representan la *misma área* les llamamos fracciones *equivalentes*.

Cuando el *área* representada por *un medio* la dividimos en *dos áreas*, creamos una fracción *equivalente*.

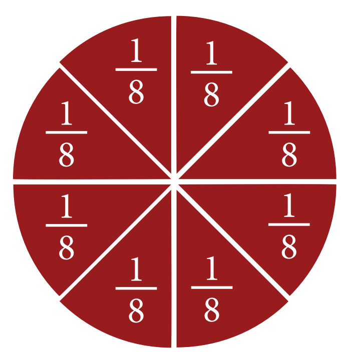
Dividir *un área* en *dos áreas* iguales es equivalente a *multiplicar* por *2* el numerador y el denominador de la fracción.

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 2}{2 \times 2} = \frac{2}{4} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$

Dividimos un círculo en *cuatro* partes iguales.

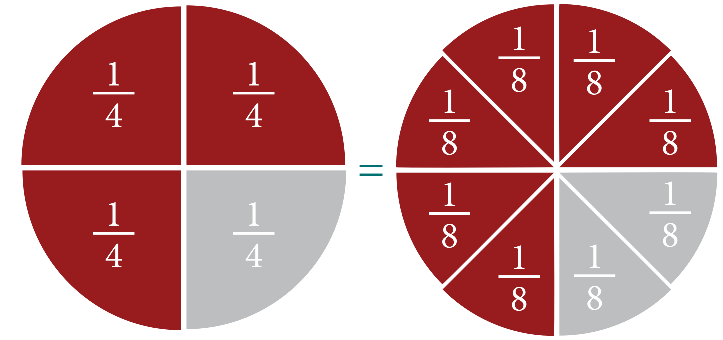


Ahora lo dividimos en *ocho* partes iguales.



Hemos creado fracciones equivalentes ya que: $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$

Tomamos *tres cuartos* que es equivalente a *seis octavos*.



$$\frac{3}{4} \qquad \frac{6}{8}$$

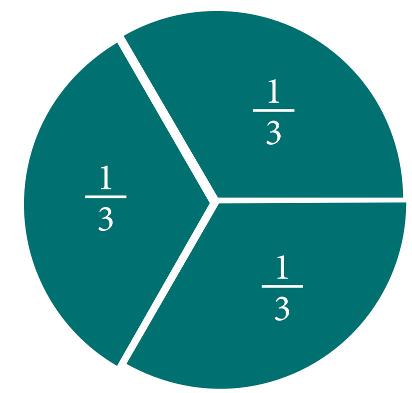
Hemos dividido *un* cuarto en *dos* partes iguales, lo cual es equivalente a *multiplicar* por *2* el numerador y denominador de la fracción.

Para crear el doble de fracciones.

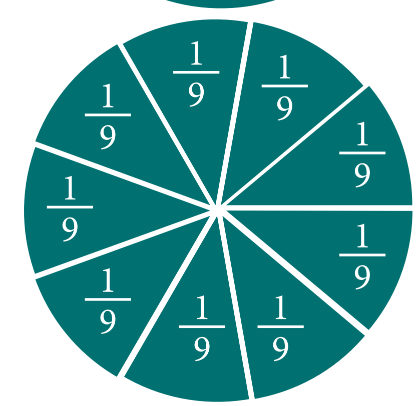
$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 2}{4 \times 2} = \frac{6}{8} \quad \longrightarrow \quad \frac{3}{4} = \frac{6}{8}$$

Para hacer las fracciones de la mitad de tamaño.

Dividimos un círculo en *tres* partes iguales.



Ahora lo dividimos en *nueve* partes iguales.



Hemos creado fracciones equivalentes ya que: $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$

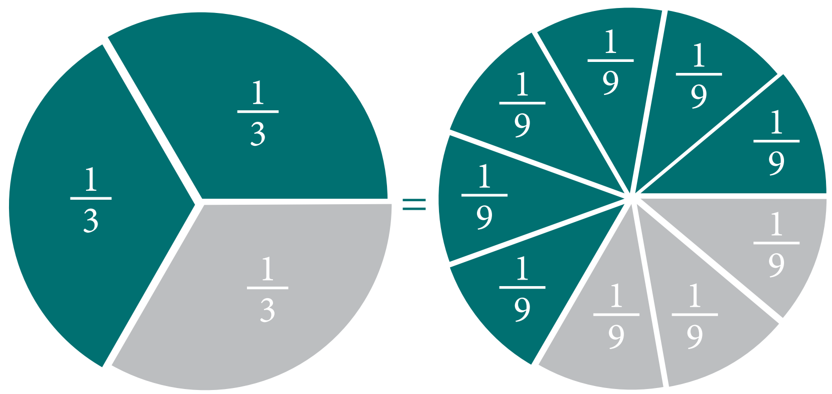
Hemos dividido *un* tercio en *tres* partes iguales, lo cual es equivalente a *multiplicar* por *3* el numerador y denominador de la fracción.

Para crear el triple de fracciones.

$$\frac{1}{3} = \frac{1\times 3}{3\times 3} = \frac{3}{9} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{3} = \frac{3}{9}$$

Para hacer las fracciones de la tercera parte de tamaño.

Tomamos *dos tercios* que es equivalente a *seis novenos*.



$\frac{2}{3}$ $\frac{6}{9}$

Fracciones equivalentes utilizando la multiplicación y división

Multiplicando el numerador y el denominador de una fracción por el mismo número creamos una fracción equivalente como hemos demostrado.

$$\frac{2}{5} = \frac{2\times 3}{5\times 3} = \frac{6}{15} \longrightarrow \frac{2}{5} = \frac{6}{15} \qquad \frac{2}{5} = \frac{2\times 4}{5\times 4} = \frac{8}{20} \longrightarrow \frac{2}{5} = \frac{8}{20}$$

$$\frac{3}{9} = \frac{3\times 2}{9\times 2} = \frac{6}{18} \longrightarrow \frac{3}{9} = \frac{6}{18} \qquad \frac{3}{9} = \frac{3\times 3}{9\times 3} = \frac{9}{27} \longrightarrow \frac{3}{9} = \frac{9}{27}$$

La *división* es la operación *inversa* de la *multiplicación*, por lo cual si dividimos el numerador y el denominador de una fracción entre el mismo número, también creamos fracciones equivalentes.

$$\frac{\cancel{6}^{\,2}}{\cancel{18}_{\,2}} = \frac{3}{9} \longrightarrow \frac{6}{18} = \frac{3}{9} \qquad \frac{\cancel{6}^{\,3}}{\cancel{18}_{\,3}} = \frac{2}{6} \longrightarrow \frac{6}{18} = \frac{2}{6}$$

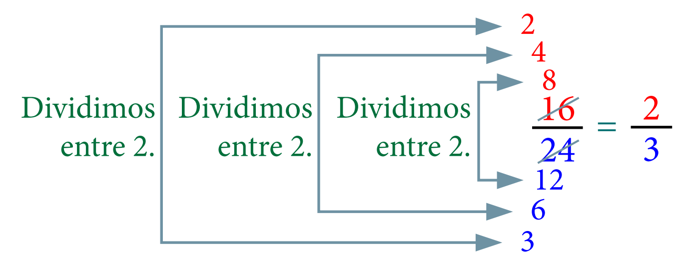
$$\frac{\cancel{3}^{\,3}}{\cancel{9}_{\,3}} = \frac{1}{3} \longrightarrow \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \longrightarrow \frac{6}{18} = \frac{3}{9} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Simplificación de fracciones

Cuando creamos fracciones equivalentes dividiendo el numerador y el denominador por el mismo número, simplificamos la fracción.

Para hacer más sencillo el proceso de simplificar una fracción, las divisiones las hacemos mentalmente.

Cuando una fracción puede simplificarse varias veces utilizamos el siguiente procedimiento haciendo las divisiones mentalmente.



Cada vez que dividimos el numerador y el denominador por el mismo número, creamos una fracción equivalente.

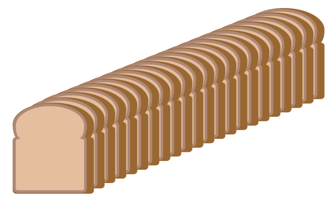
$$\frac{16}{24} = \frac{8}{12} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\longrightarrow \quad \frac{18}{42} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$$

Unidades simples y compuestas combinadas

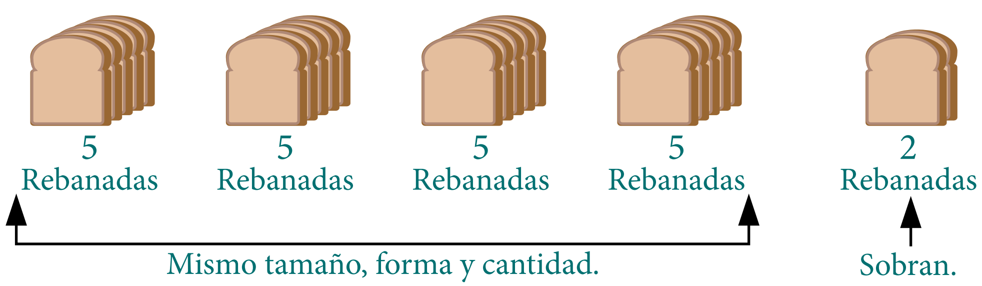
Cuando la unidad es *compuesta*, en algunas ocasiones necesitamos combinarla con una unidad *simple* repetida varias veces.

Por ejemplo, tenemos un pan que está cortado en 22 rebanadas. Queremos saber cuántas rebanadas son *tres cuartos* del pan.

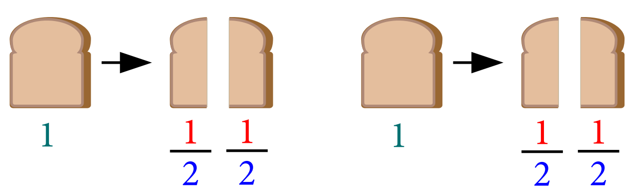


Se trata de fracciones cuya unidas es *compuesta*, ya que el pan está *compuesto* de 22 rebanas.

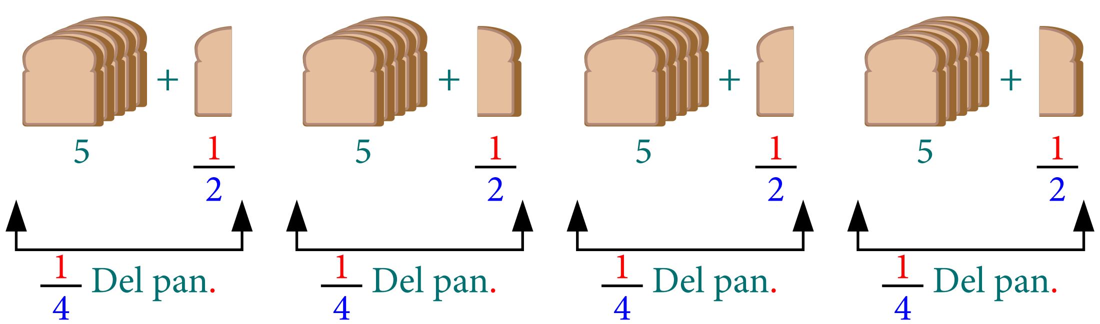
Dividimos en *cuatro* partes iguales para formar *cuartos* de la unidad.



Las *dos* rebanadas que sobran las dividimos a la *mitad*, para tener *cuatro* mitades.



Formamos *cuatro fracciones* iguales, del mismo tamaño, forma y cantidad.



Unidad compuesta. → $\frac{1}{4} = 5 + \frac{1}{2}$ ← Rebanada.

Del pan. Rebanadas.

La rebanada de pan es una unidad simple repetida varias veces. Expresamos la fracción en notación mixta.

Entero. → $5 + \frac{1}{2} = 5\frac{1}{2}$

Fracción.

Cuando trabajamos con fracciones es muy importante que claramente especifiquemos qué es la *unidad*. Si se trata de una *unidad* simple o compuesta.

En el ejemplo anterior el *pan completo* es una *unidad compuesta*, sin embargo las *rebanadas* son *unidades simples*.

$5 + \frac{1}{2}$ ← Unidad.

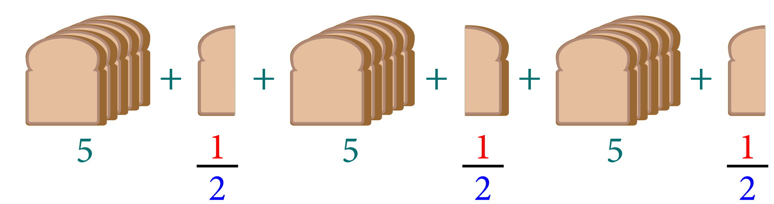
Unidades.

Por eso es posible decir que: $\frac{1}{4} = 5 + \frac{1}{2}$ ← Fracción de la unidad simple.

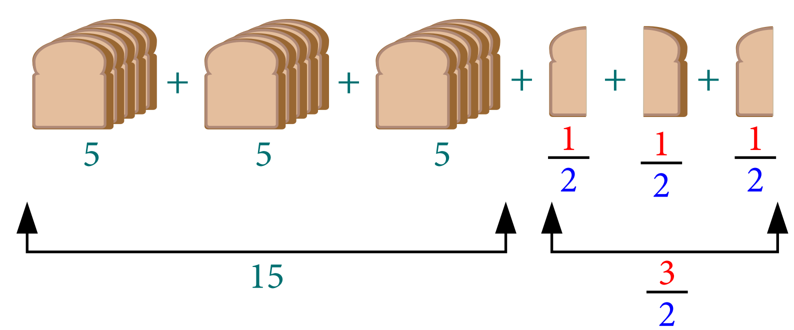
Fracción de la unidad compuesta. Unidad simple repetida varias veces.

$$\frac{1}{4} = 5 + \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{4} = 5\frac{1}{2}$$

Ahora que ya conocemos cuántas rebanadas son *un cuarto* del pan, podemos calcular cuántas rebanadas son *tres cuartos* del pan.



Sumamos las rebanas y las mitades de rebanada.



Expresamos la fracción *impropia* en *notación mixta*.

$$\frac{3}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{4} = 15 + 1 + \frac{1}{2} = 16 + \frac{1}{2} = 16\frac{1}{2}$$

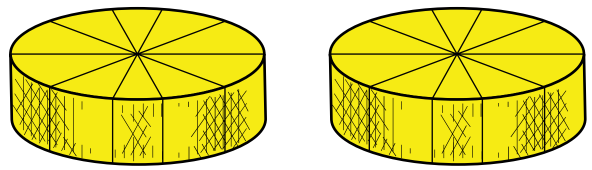
Del pan. Rebanadas.

Ejemplos de unidades simples y compuestas combinadas

Otros dos *ejemplos* en los cuales la unidad es *compuesta* y cada una de las partes que la componen son unidades *simples*. Hacemos la solución con dibujos y aritméticamente.

Tenemos dos quesos. Cada uno está dividido en diez rebanadas.

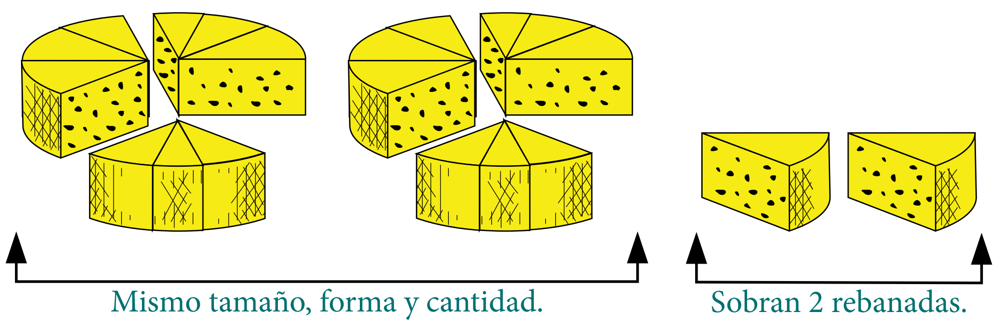
La unidad es compuesta.



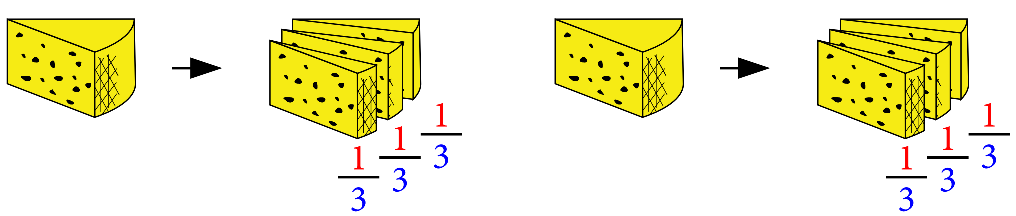
Primera Pregunta.

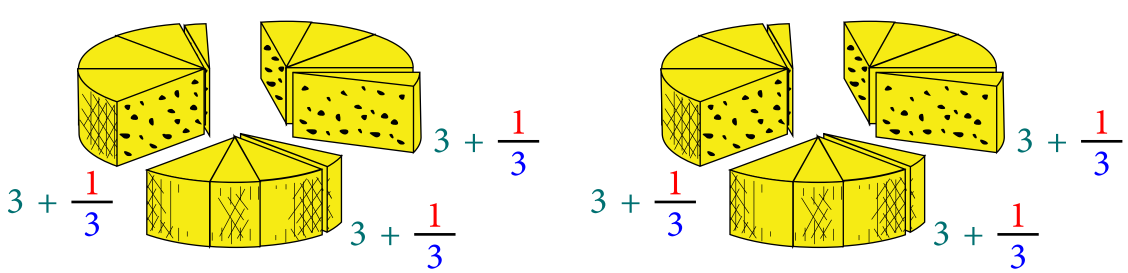
¿Cuántas rebanadas son cinco sextos?

Tenemos que dividir la unidad en *seis partes iguales* en forma, tamaño y cantidad.



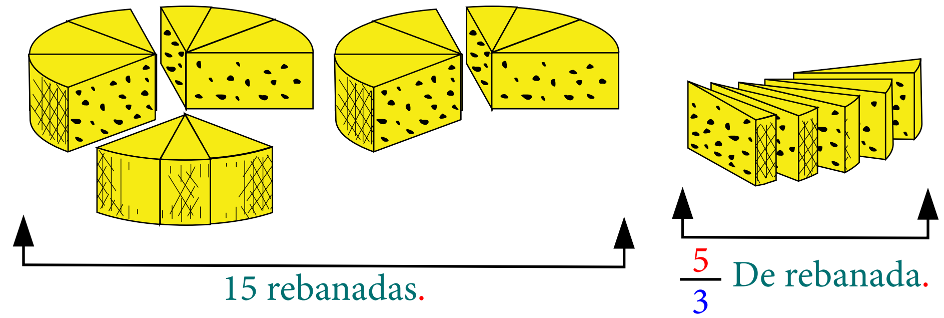
Cada una de las rebanadas que sobran las dividimos en *tres partes iguales*, para tener *seis tercios* de rebanada.





Las *seis* fracciones son iguales en forma, tamaño y cantidad.

Tomamos cinco sextos del total de las fracciones.



$$\frac{5}{6} = 15 + \frac{5}{3}$$

Fracciones de la unidad simple.

Fracción de la unidad compuesta.

Unidad simple repetida varias veces.

Expresamos la fracción impropia en notación mixta. $\frac{5}{3} = \frac{3+2}{3} = \frac{3}{3} + \frac{2}{3} = 1 + \frac{2}{3}$

Efectuamos la suma de fracciones. $15 + \frac{5}{3} = 15 + 1 + \frac{2}{3} = 16 + \frac{2}{3}$

Cinco sextos del total de las rebanadas de los quesos es: $\frac{5}{6} = 16 + \frac{2}{3} = 16\,\frac{2}{3}$

Para hacer la solución aritmética dividimos el número total de rebanadas entre *seis*, ya que queremos formar *sextos* de la unidad compuesta.

$$\begin{array}{r|l} & \;\;3 \\ 6 & 20 \\ & -18 \\ & \;\;\;2 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{6} = 3 + \frac{2}{6} = 3 + \frac{1}{3}$$

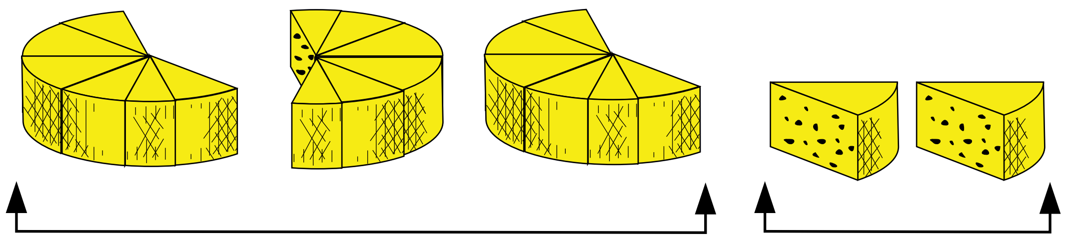
Tomamos cinco sextos del total de las rebanadas de los quesos. $\frac{5}{6} = \frac{1}{6} \times 5 = 5 \times 3 + \frac{1 \times 5}{3} = 15 + \frac{5}{3}$

Expresamos la fracción impropia en notación mixta y efectuamos la suma. $\frac{5}{6} = 15 + \frac{5}{3} = 15 + 1 + \frac{2}{3} = 16\,\frac{2}{3}$

Segunda Pregunta.

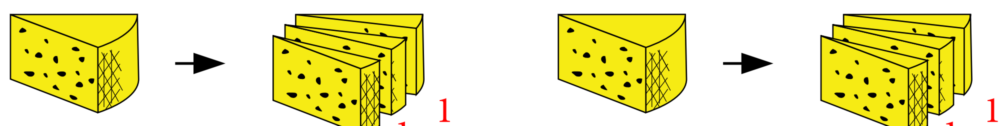
¿Cuántas rebanadas son dos tercios?

Tenemos que dividir la unidad en *tres* partes iguales en forma, tamaño y cantidad.

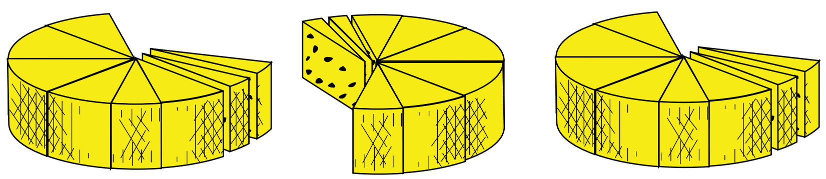


Mismo tamaño, forma y cantidad. Sobran 2 rebanadas.

Cada una de las rebanadas que sobran las dividimos en *tres partes iguales*, para tener *seis tercios* de rebanada y los distribuimos en las tres fracciones.



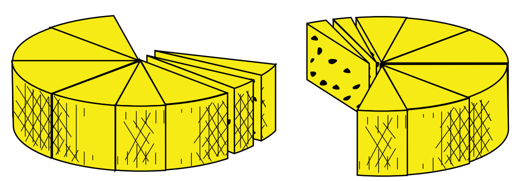
$\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}$ $\qquad$ $\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}$



$6 + \frac{2}{3}$ $\qquad$ $6 + \frac{2}{3}$ $\qquad$ $6 + \frac{2}{3}$

Las *tres* fracciones son iguales en forma, tamaño y cantidad.

Tomamos dos tercios del total de las fracciones.



$$\frac{2}{3} = 12 + \frac{4}{3}$$

Fracciones de la unidad simple.

Fracción de la unidad compuesta.

Unidad simple repetida varias veces.

Expresamos la fracción impropia en notación mixta.

$$\frac{4}{3} = \frac{3+1}{3} = \frac{3}{3} + \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{3}$$

Efectuamos la suma de fracciones.

$$12 + \frac{4}{3} = 12 + 1 + \frac{1}{3} = 13 + \frac{1}{3}$$

Dos tercios del total de las rebanadas de los quesos es:

$$\frac{2}{3} = 13 + \frac{1}{3} = 13\,\frac{1}{3}$$

Para hacer la solución aritmética dividimos el número total de rebanadas entre *tres*, ya que queremos formar *tercios* de la unidad compuesta.

$$3\,\overline{)\,20}\ \to 6,\quad 20 - 18 = 2 \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{3} = 6 + \frac{2}{3}$$

Tomamos dos tercios del total de las rebanadas de los quesos.

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \times 2 = 6 \times 2 + \frac{2 \times 2}{3} = 6 + \frac{4}{3}$$

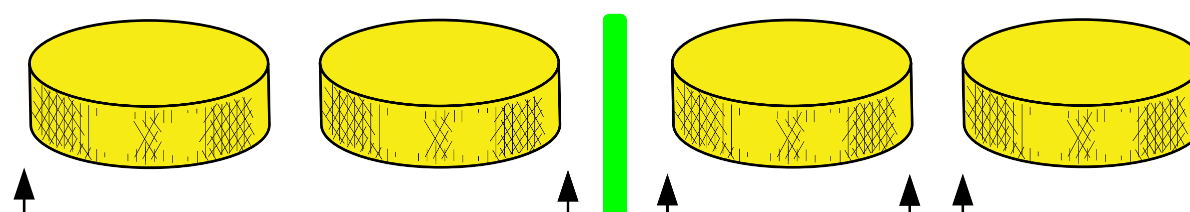
Expresamos la fracción impropia en notación mixta y efectuamos la suma.

$$\frac{2}{3} = 12 + \frac{4}{3} = 12 + 1 + \frac{1}{3} = 13\,\frac{1}{3}$$

Comparación de Unidades Simples Repetidas Varias Veces y Unidades Compuestas

Como hemos visto es muy importante definir claramente la *unidad* antes de hacer las fracciones. De la forma como la *unidad* está definida dependen las fracciones.

Por ejemplo, tenemos *dos quesos*. En el primer caso los dos quesos forman *una unidad compuesta*, y en el segundo caso *cada queso* es *una unidad simple*, es decir, la unidad simple repetida dos veces.

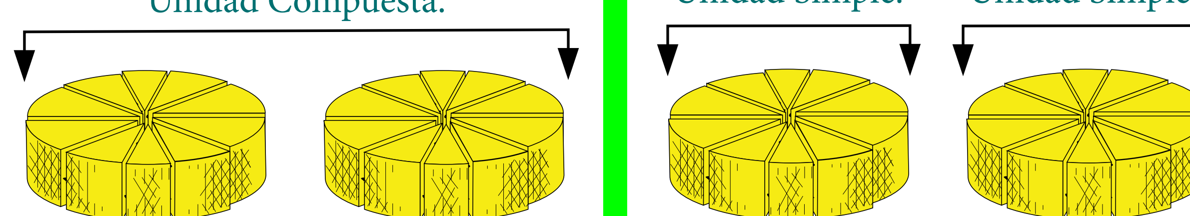


Unidad Compuesta. $\qquad$ Unidad Simple. $\qquad$ Unidad Simple.

Dividimos cada uno de los quesos en diez partes iguales.

En la unidad *compuesta* cada una de las fracciones es *una* de *veinte*, mientras que en la unidad *simple* repetida dos veces cada una de las fracciones es *una* de *diez*.

Unidad Compuesta. $\qquad$ Unidad Simple. $\qquad$ Unidad Simple.

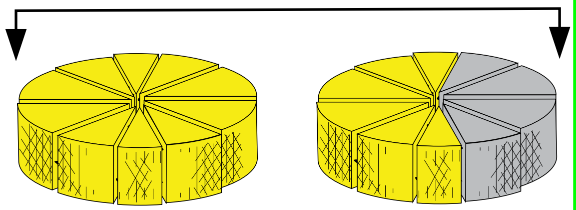


Cada fracción $= \frac{1}{20}$ $\qquad$ Cada fracción $= \frac{1}{10}$

En ambos casos queremos conocer que fracción de la unidad es *cuatro quintos*.

En ambos casos *cuatro quintos* representa el *mismo número de rebanadas*, sin embargo *no la misma fracción*, ya que en el primer caso ambos quesos son la unidad y en el segundo caso cada uno de los quesos es una unidad que está repetida.

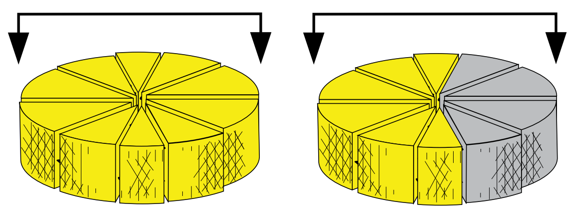
Unidad Compuesta.



Cada fracción $= \dfrac{1}{20}$

$$\frac{4}{5} = \frac{16}{20}$$

Unidad Simple. Unidad Simple.



Cada fracción $= \dfrac{1}{10}$

$$\frac{4}{5} = \frac{16}{10} = \frac{10+6}{10} = \frac{10}{10} + \frac{6}{10} = 1\frac{6}{10}$$

Números racionales

Un número fraccionarios o fracción es la relación entre dos números: el numerador y el denominador.

$\dfrac{2}{5}$ ← Esta fracción contiene 2 partes, ← De un total de 5 partes.

Relación significa lo mismo que la palabra razón, por eso a las fracciones también les llamamos números racionales.

Un número racional expresa la razón o relación que el numerador tiene con el denominador.

Todos los números naturales son racionales, ya que sí podemos expresarlos como la relación entre dos números: el numerador y el denominador.

$$\frac{1}{1} \quad \frac{3}{1} \quad \frac{4}{1} \quad \frac{7}{1} \quad \frac{9}{1} \quad \frac{14}{1} \quad \frac{23}{1} \quad \frac{48}{1} \quad \frac{75}{1} \quad \frac{92}{1} \quad \frac{349}{1} \quad \frac{785}{1} \quad \frac{826}{1}$$

Números irracionales

Cuando un número no es posible expresarlo como la relación o razón del numerador y el denominador, le llamamos *irracional*.

Se llaman *irracionales* por *no* tener una *razón –relación–* entre el numerador y el denominador.

El número irracional más famoso es el número π.

El Conjunto de los Números Reales Positivos

Sexto Nivel de Abstracción

Clasificación de los números

1. Dígitos
    1. **Uno:** 1.

       Utilizando la operación suma genera todos los dígitos.
    2. **Primos o primarios:** 2, 3, 5, 7.

       Solamente pueden ser creados utilizando el dígito **1** y la operación suma.
    3. **No primos o no primarios:** **4**, **6**, **8**, **9**.

       Pueden ser creados utilizando los dígitos primos 2 y 3 y la operación multiplicación.
    4. **Cero:** **0**.

       Representa que no hay objeto y la columna numérica está vacía.
2. Números naturales
    1. **Primos o primarios:** 11, 13, 17, 19, ...

       Solamente pueden ser creados utilizando el dígito **1** y la operación suma.
    2. **No primos o no primarios:** **10**, **12**, **14**, **15**, ...

       Pueden ser creados utilizando los dígitos primos y la operación multiplicación.
3. Números enteros

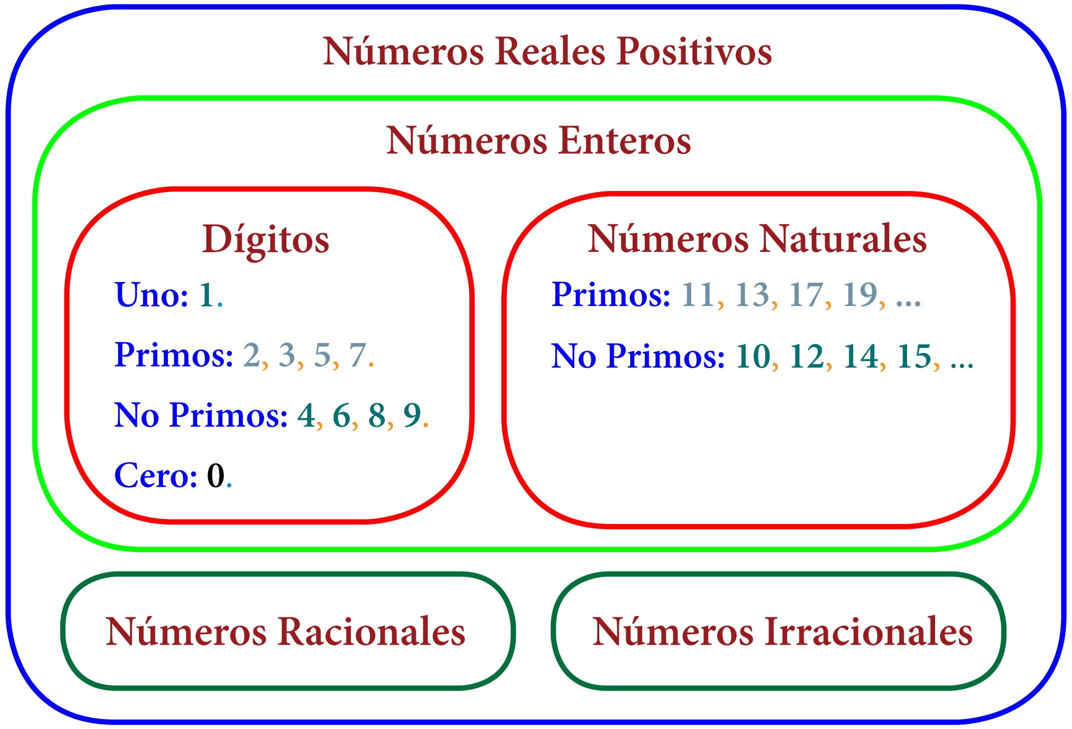
   A todos los dígitos y a números naturales les llamamos enteros.
4. Números racionales o fraccionarios

   Son la división de dos números enteros, excepto el cero, que expresan la razón o relación entre el numerador y el denominador.
5. Números irracionales

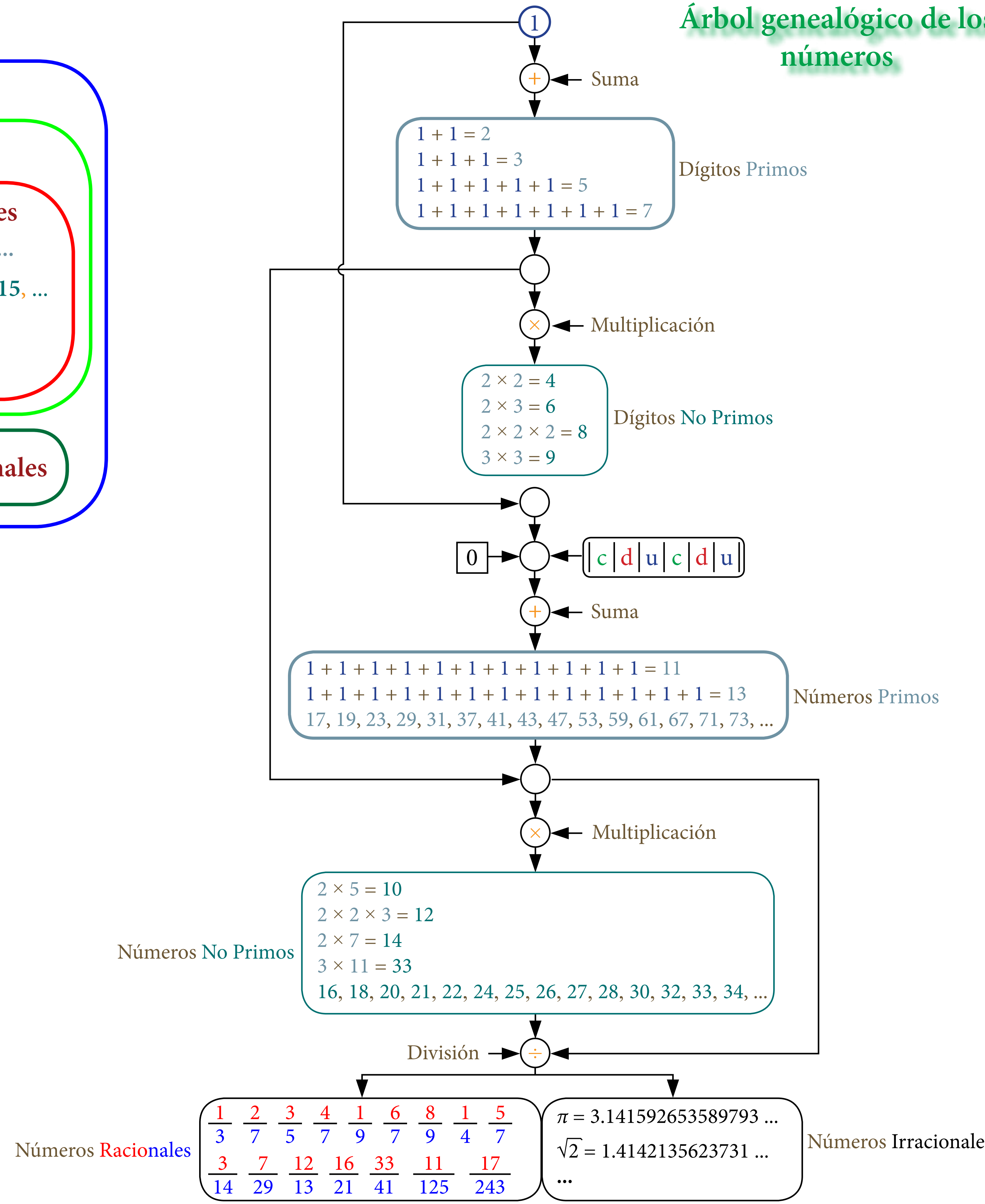
   No pueden ser expresados como la razón o relación entre el numerador y el denominador. Solamente pueden ser expresados como número decimal.
6. Números reales positivos

   El conjunto de los números enteros, racionales e irracionales.

Clasificación de los números en conjuntos



Árbol genealógico de los números



La recta de los números reales positivos

La recta de los números reales positivos, empieza en cero y crece sin límite, es decir, podemos seguir añadiendo números y nunca terminar. En lenguaje matemático, decimos que tiende a infinito.

En matemáticas, tender, es decir, caminar hacia un número sin nunca alcanzarlo, se representa con una flecha. Infinito se representa con un símbolo que parece un 8 acostado ∞. Tender a infinito se representa como: $\rightarrow \infty$.