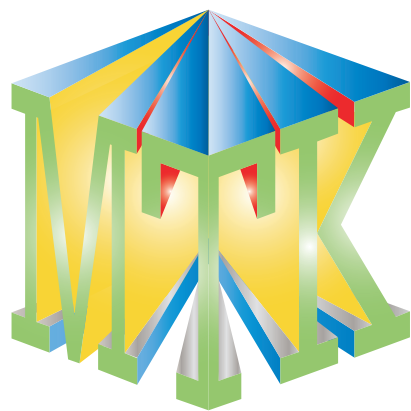


Capítulo 6



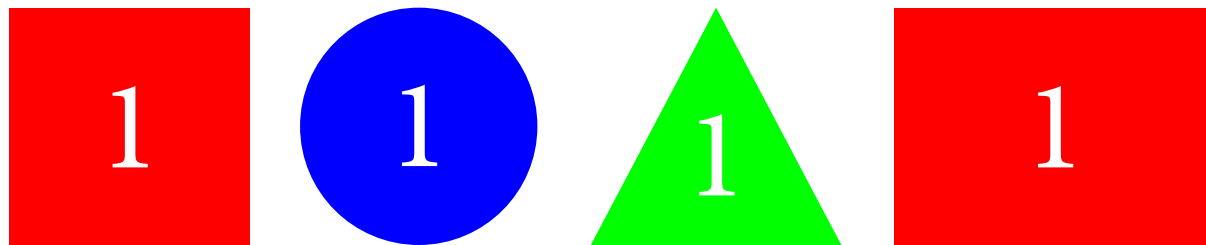
Concepto de Número Fraccionario
Unidad de un Número Fraccionario

Concepto de Número Fraccionario

Primero y Segundo Niveles de Abstracción

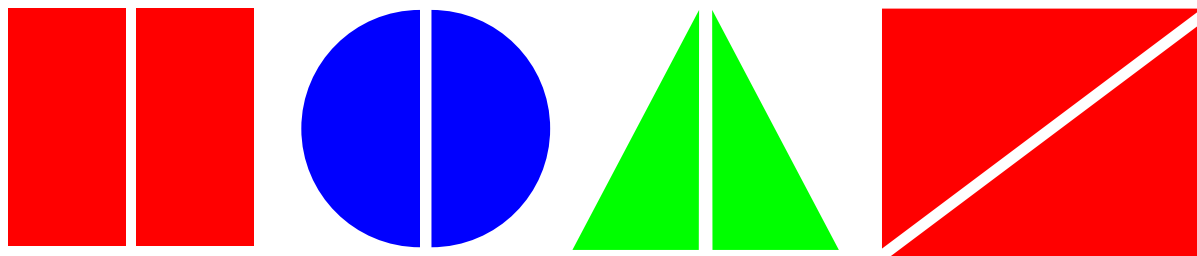
Unidad de una fracción

En los primeros niveles de abstracción, utilizamos como unidad de una fracción, una figura geométrica.



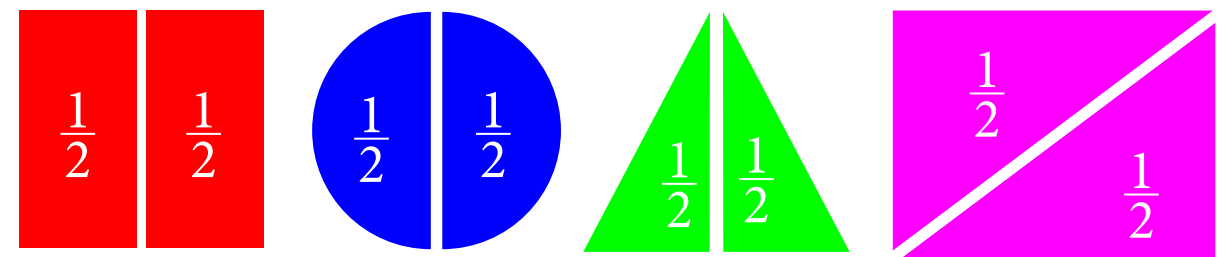
Concepto de fracción

Cuando la unidad está dividida –fraccionada– en partes iguales en forma y tamaño, a cada una de las partes, le llamamos una fracción.



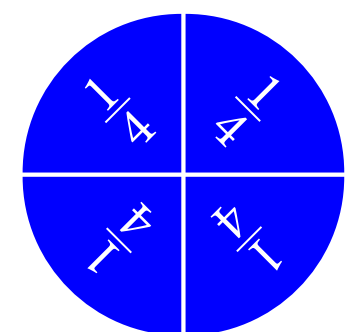
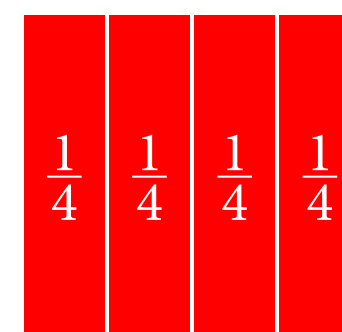
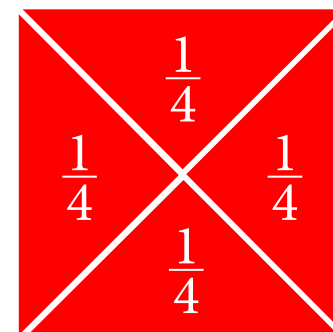
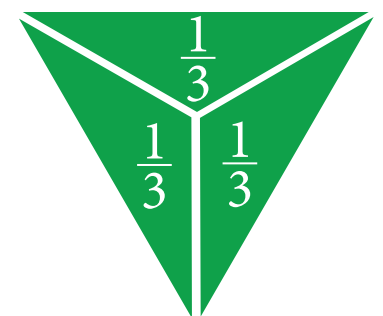
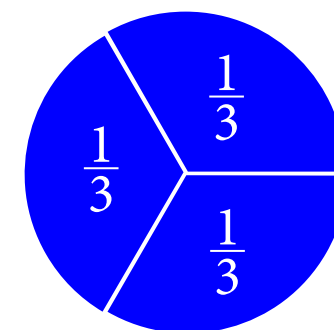
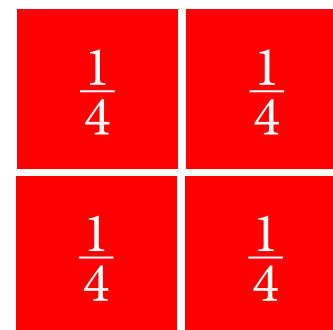
Notación de fracción

Para indicar que la unidad ha sido dividida en partes iguales en forma y tamaño, utilizamos dos números: uno en la parte superior –**numerador**– para indicar cuántas partes tomamos, y otro número en la parte inferior –**denominador**– para indicar en cuántas partes hemos dividido la unidad.

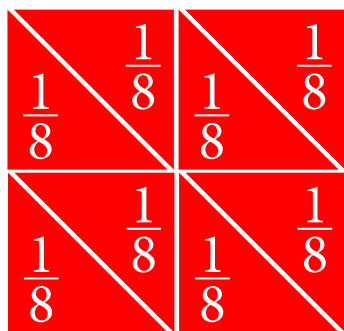
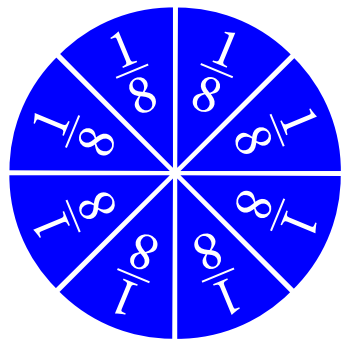
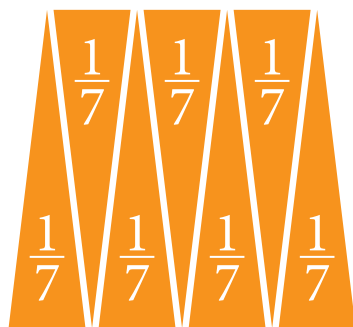
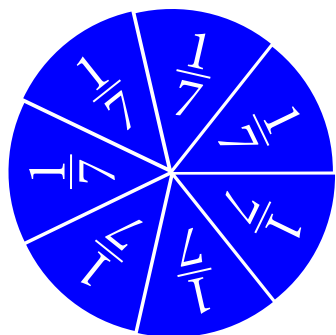
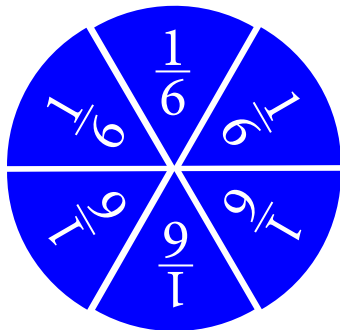
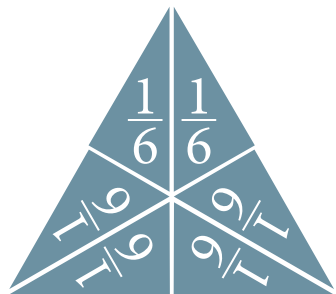
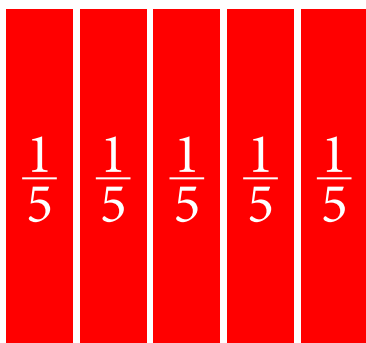
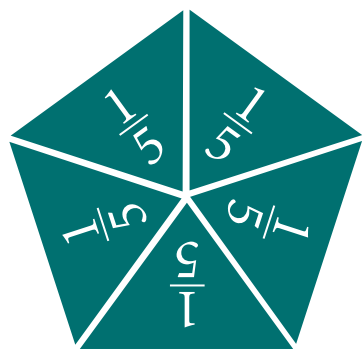


Numerador. $\rightarrow \frac{1}{2} \leftarrow$ 1 Fracción.
Denominador. $\rightarrow \frac{1}{2} \leftarrow$ De 2 fracciones.

Medios, tercios y cuartos



Quintos, sextos, séptimos y octavos



El material didáctico, los ejercicios en los libros de texto y los juegos educativos, han sido diseñados para que los niños, desde que inician el estudio de las matemáticas, entiendan y demuestran el concepto de fracción y se familiaricen con la notación de fracción.

Mediante el uso de figuras geométricas en los dos primeros niveles de abstracción, pretendemos que los estudiantes imaginen las fracciones, e intuitivamente descubran, que solamente fracciones que son de la misma forma y tamaño se pueden sumar.

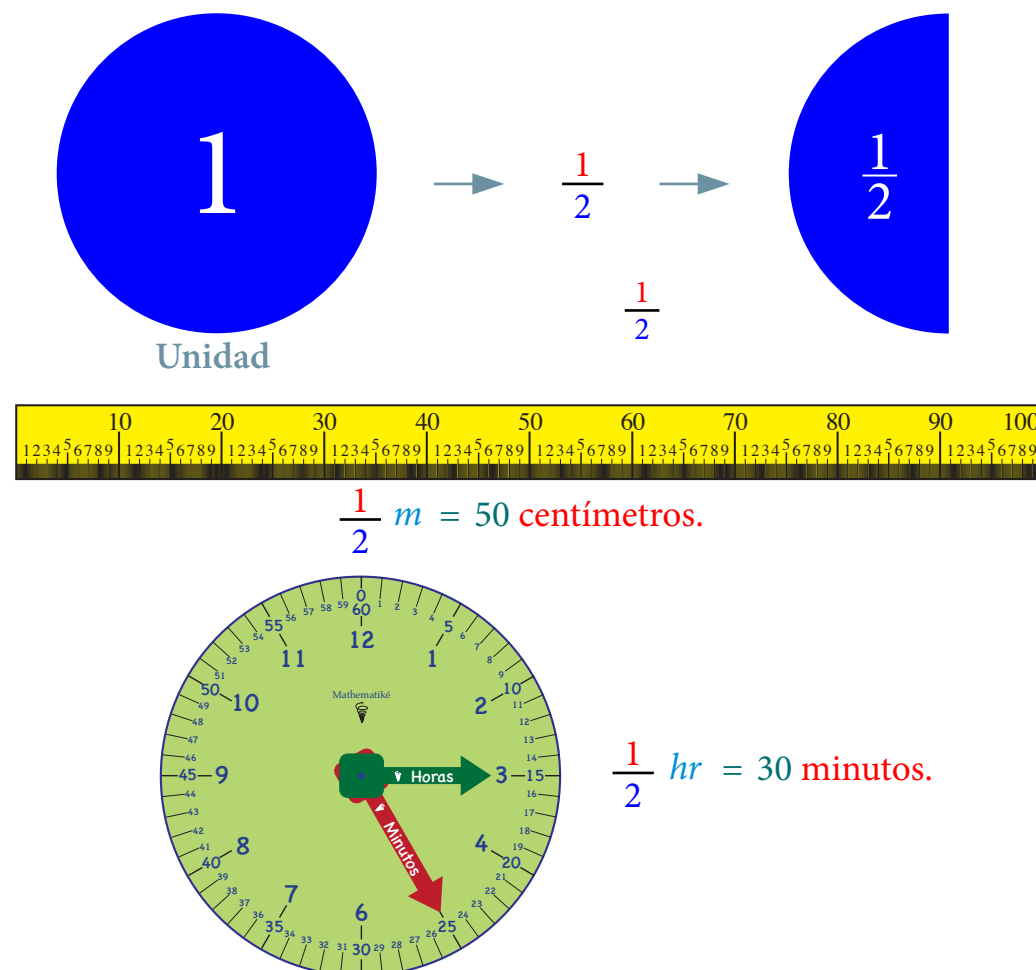
Unidad Simple de un Número Fraccionario

Tercero al Sexto Niveles de Abstracción

Unidad de una fracción

Para que una fracción adquiriera sentido, primero debemos definir cuál es la unidad de la fracción, ya que la misma fracción puede significar diferentes realidades.

Por ejemplo, la fracción $\frac{1}{2}$ puede ser una figura geométrica, o puede valer 30 o 50 u otro número, dependiendo de la unidad de la que procede.



Concepto de unidad

En el *primero* y *segundo* niveles de abstracción la *unidad* de una fracción es una figura geométrica.

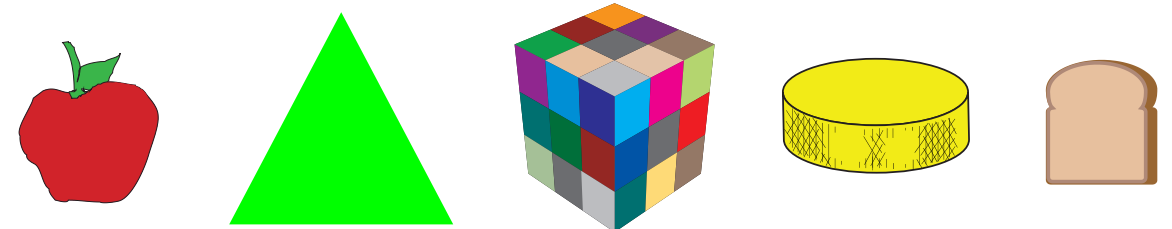
En el *tercero* y *cuarto* niveles de abstracción la *unidad* de una fracción es una figura geométrica y una unidad de medición: tiempo, distancia, área y volumen.

En el *quinto* nivel de abstracción estudiamos que la *unidad* de una fracción puede ser *simple* o *compuesta*.

Unidad simple

La unidad de una fracción es *simple* cuando el número que fraccionamos es 1, 1 objeto, 1 figura geométrica o 1 unidad de medición.

Del *primero* al *cuarto* niveles de abstracción hemos utilizado únicamente *unidades simples*.



Fracciones simples y complejas

Las fracciones son simples cuando su numerador y denominador son números enteros.

Numerador. → $\frac{3}{5}$
Denominador. →

Fracción Simple

Las fracciones son complejas cuando su numerador y denominador son números fraccionarios.

Numerador. → $\frac{2}{7}$
Denominador. → $\frac{4}{9}$

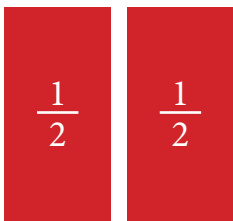
Fracción Compleja

Notación de fracción cuando la unidad es simple

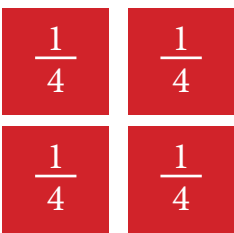
Para explicar claramente el valor de una fracción necesitamos dos términos: un término que especifique en cuántas partes hemos dividido la unidad –denominador– y otro término que especifique cuántas fracciones o partes de ese total hemos tomado –numerador–.



Unidad



2 Fracciones

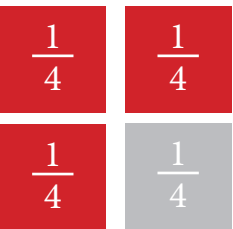


4 Fracciones

Numerador. → $\frac{1}{2}$ ← 1 Fracción.
Denominador. → ← De 2 fracciones.

$\frac{1}{4}$ ← 1 Fracción.
← De 4 fracciones.

Numerador. → $\frac{1}{2}$ ← Especifica cuántas partes del total de partes hemos tomado.
Denominador. → ← Especifica en cuántas partes hemos dividido la unidad.

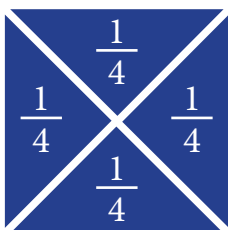


$\frac{3}{4}$ ← Cuántas partes del total de partes hemos tomado.
← En cuántas partes hemos dividido la unidad.

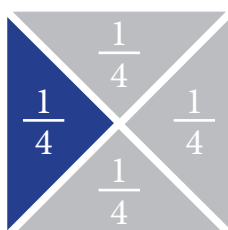
Las fracciones tienen que ser del mismo tamaño y forma.



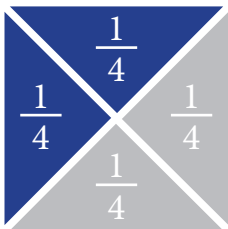
Unidad



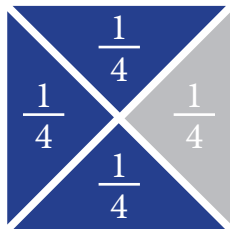
4 Fracciones



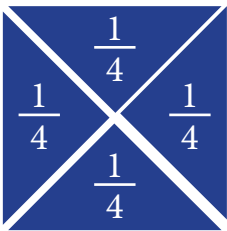
$\frac{1}{4}$ ← 1 Fracción.
← De 4 fracciones.



$\frac{2}{4}$ ← 2 Fracciones.
← De 4 fracciones.



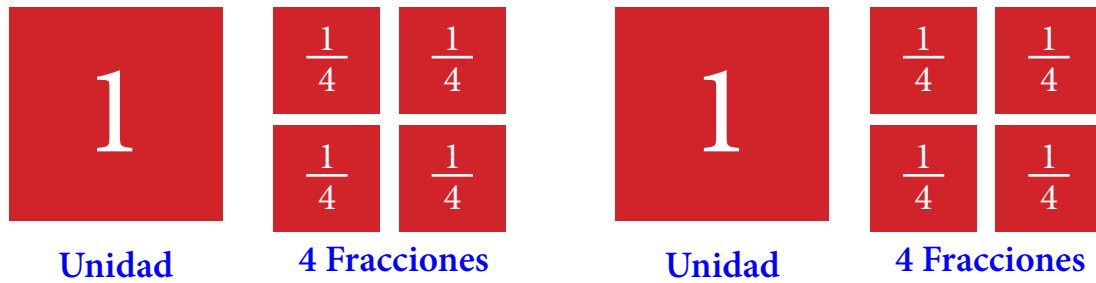
$\frac{3}{4}$ ← 3 Fracciones.
← De 4 fracciones.



4 Fracciones. → $\frac{4}{4} = 1$ ← Unidad.
De 4 fracciones. →

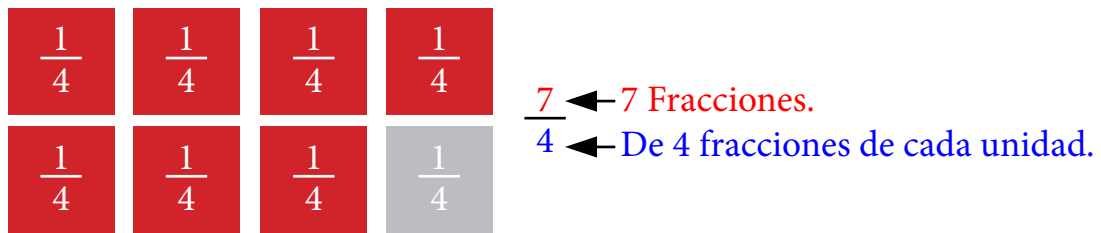
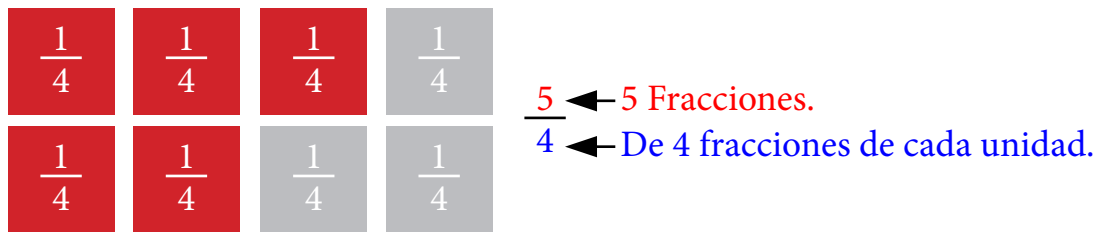
Unidad simple repetida varias veces

La misma *unidad*, *repetida* varias veces, podemos dividirla o fraccionarla en partes iguales y tomar fracciones que comprendan más de una unidad.

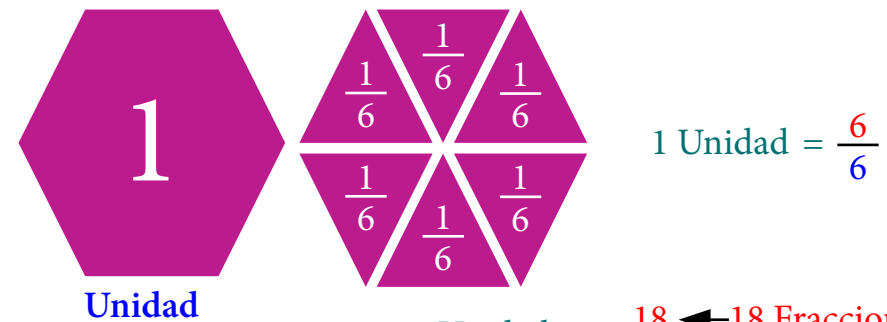
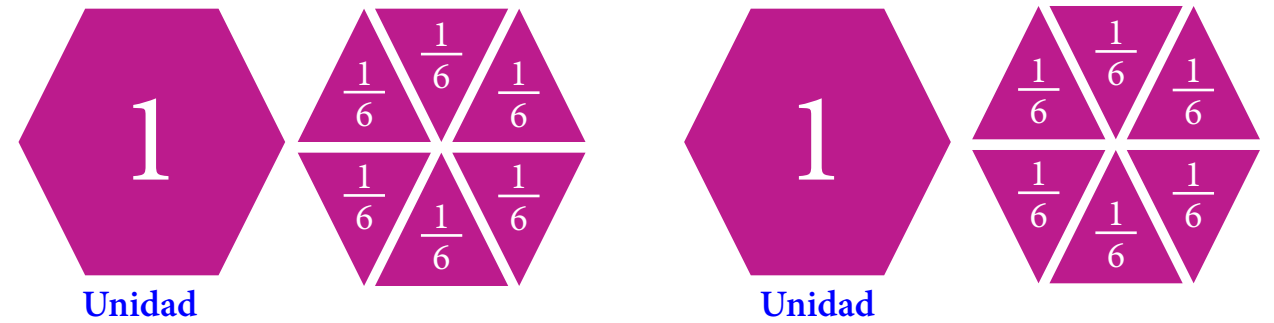


$$1 \text{ Unidad} = \frac{4}{4} \quad 2 \text{ Unidades} = \frac{8}{4} \leftarrow 8 \text{ Fracciones.}$$

$\leftarrow$ De 4 fracciones de cada unidad.

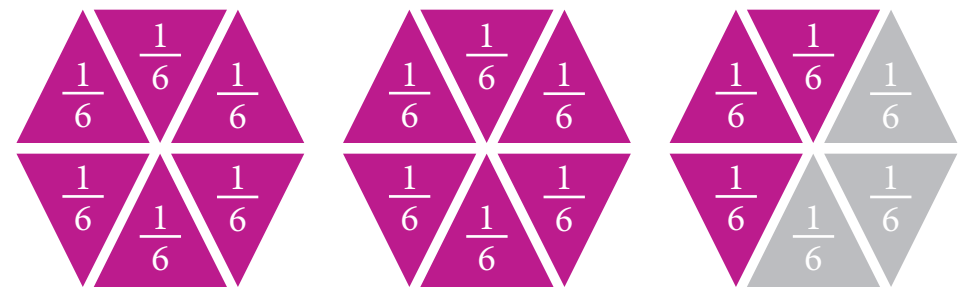


Es muy importante *no confundir* fracciones de una *unidad compuesta* y fracciones de una *unidad repetida* varias veces.



$$3 \text{ Unidades} = \frac{18}{6}$$

18 Fracciones.
De 6 fracciones de cada unidad.



$\frac{15}{6}$ $\leftarrow$ 15 Fracciones.
 $\frac{15}{6}$ $\leftarrow$ De 6 fracciones de cada unidad.

Fracciones impropias

Cuando en una fracción el numerador es *mayor* que el denominador sabemos que la fracción procede de una *unidad repetida varias veces*.

Cuando el *numerador* de una fracción es *mayor* que el denominador, a la fracción le llamamos *fracción impropia*.

$$\frac{18}{6} \leftarrow \text{Mayor que el denominador.} \rightarrow \frac{15}{6}$$

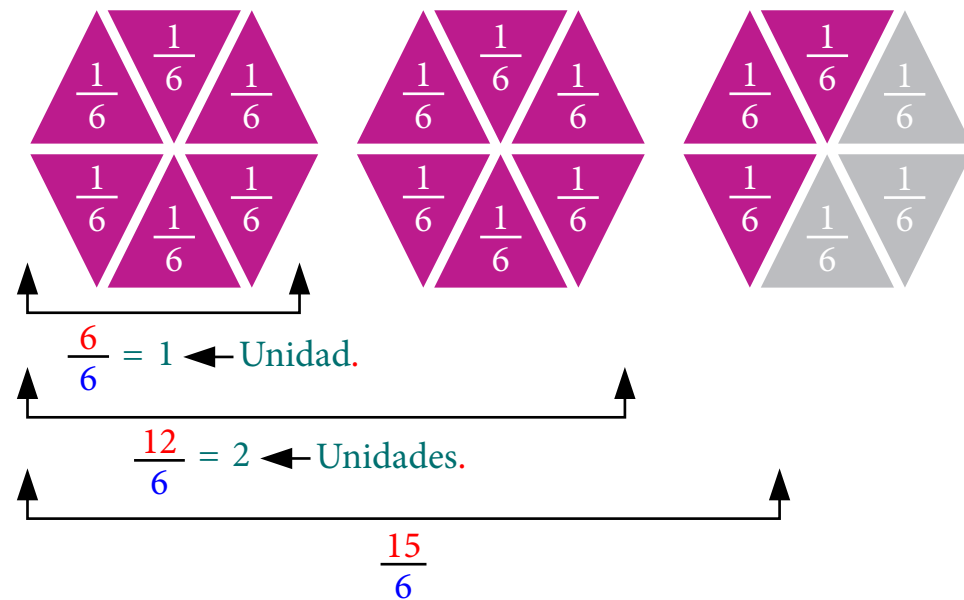
Fracciones impropias.

Como sabemos que una fracción *impropia* procede de una *unidad repetida varias veces*, podemos determinar de *cuántas unidades* procede.

El *denominador* indica el número de fracciones en las cuales la *unidad* está dividida.

$$\frac{15}{6} \leftarrow \text{Cada una de las unidades está dividida en 6 fracciones.}$$

$$\rightarrow \text{El numerador indica cuántas fracciones hemos tomado.}$$



Descomponemos el numerador en las unidades que podemos formar de acuerdo a lo que indica el denominador.

$$\frac{15}{6} = \frac{12+3}{6} = \frac{12}{6} + \frac{3}{6} = 2 + \frac{3}{6}$$

↑
2 Unidades.

Fracciones impropias en notación mixta

La fracción impropia la podemos expresar como la suma de un número entero más una fracción *no impropia*, es decir *propia*.

Cuando una *fracción impropia* la expresamos como la *suma* de un *número entero* y una *fracción propia* le llamamos *notación mixta*.

Le llamamos *notación mixta* porque hemos *mezclado un número entero* con una *fracción*.

$$\frac{15}{6} = 2 + \frac{3}{6}$$

↑ ↑
Entero. Fracción.

En matemáticas nos gusta escribir las expresiones en la forma más compacta posible, por eso no escribimos el signo más, pero sabemos que es una suma.

$$\frac{15}{6} = 2 \frac{3}{6}$$

Utilizando el concepto de fracciones equivalentes, simplificamos la fracción.

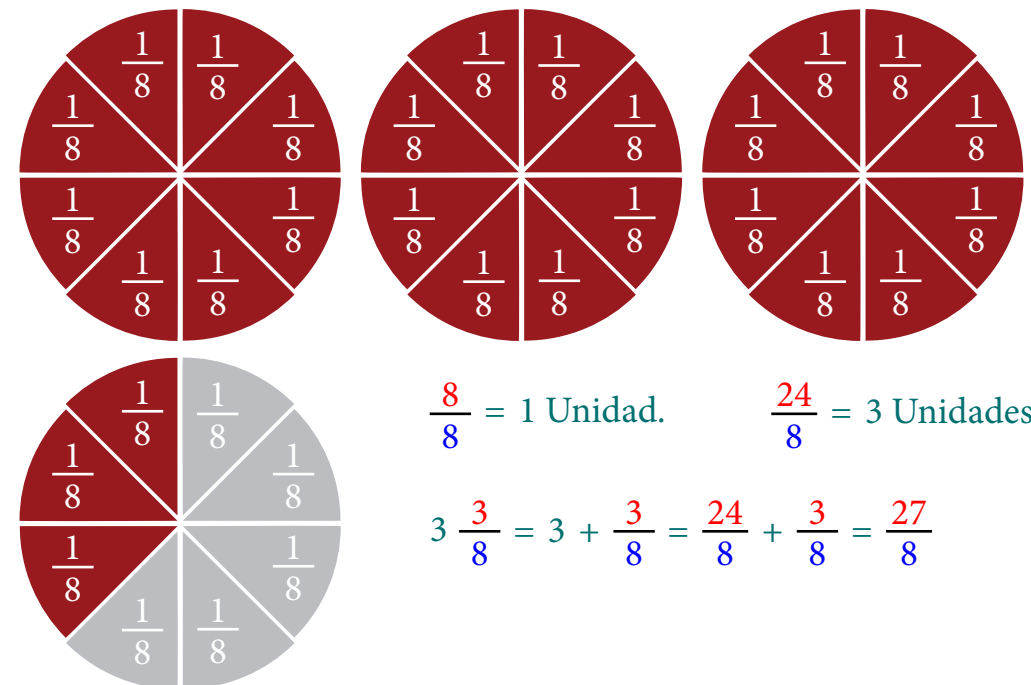
$$\text{Dividimos } \frac{3}{6} \text{ entre 3.} \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$\frac{15}{6} = 2 \frac{3}{6} = 2 \frac{1}{2}$$

Cuando una *fracción impropia* está expresada en notación mixta, podemos convertirla en notación de fracción haciendo el proceso inverso.

La fracción impropia en notación mixta:

$$3 \frac{3}{8} = 3 + \frac{3}{8}$$

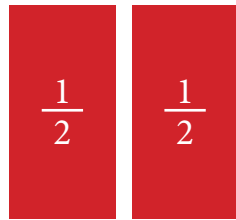


Fracciones equivalentes

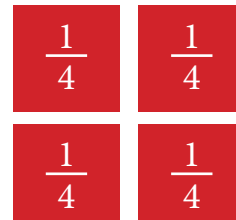
Una *unidad*, podemos fraccionarla de muchas maneras diferentes. Por ejemplo, en medios y en cuartos.



Unidad



2 Fracciones



4 Fracciones

Nos damos cuenta que *un medio* es equivalente a *dos cuartos* ya que representan exactamente la misma área.

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$

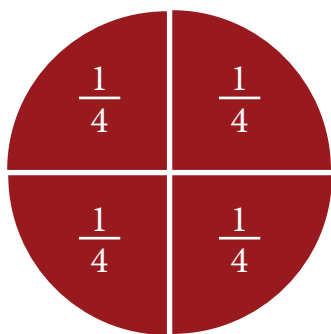
Cuando dos fracciones representan la *misma área* les llamamos fracciones *equivalentes*.

Cuando el *área* representada por *un medio* la dividimos en *dos áreas*, creamos una fracción *equivalente*.

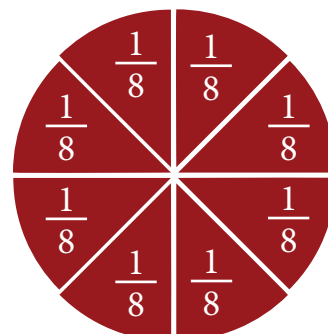
Dividir *un área* en *dos áreas* iguales es equivalente a *multiplicar* por *2* el numerador y el denominador de la fracción.

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 2}{2 \times 2} = \frac{2}{4} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$

Dividimos un círculo en *cuatro* partes iguales.



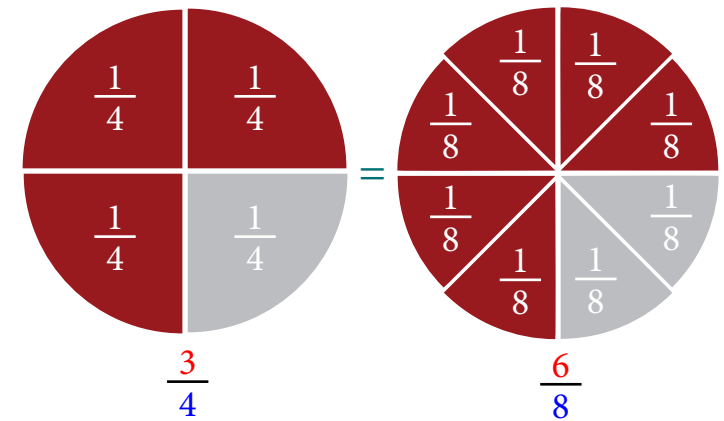
Ahora lo dividimos en *ocho* partes iguales.



Hemos creado fracciones equivalentes ya que:

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$$

Tomamos *tres cuartos* que es equivalente a *seis octavos*.



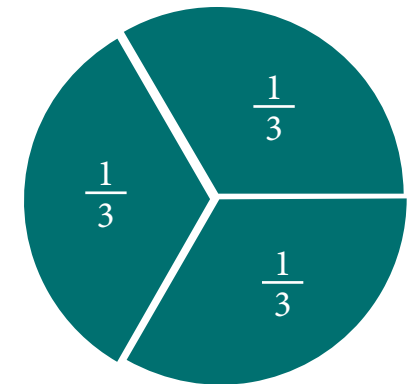
Hemos dividido *un* cuarto en *dos* partes iguales, lo cual es equivalente a *multiplicar* por *2* el numerador y denominador de la fracción.

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 2}{4 \times 2} = \frac{6}{8} \rightarrow \frac{3}{4} = \frac{6}{8}$$

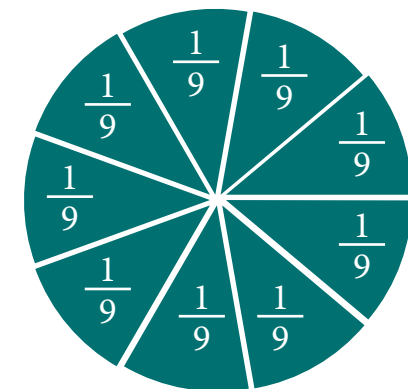
Para crear el *doble* de fracciones.

Para hacer las fracciones de la *mitad* de tamaño.

Dividimos un círculo en *tres* partes iguales.



Ahora lo dividimos en *nueve* partes iguales.



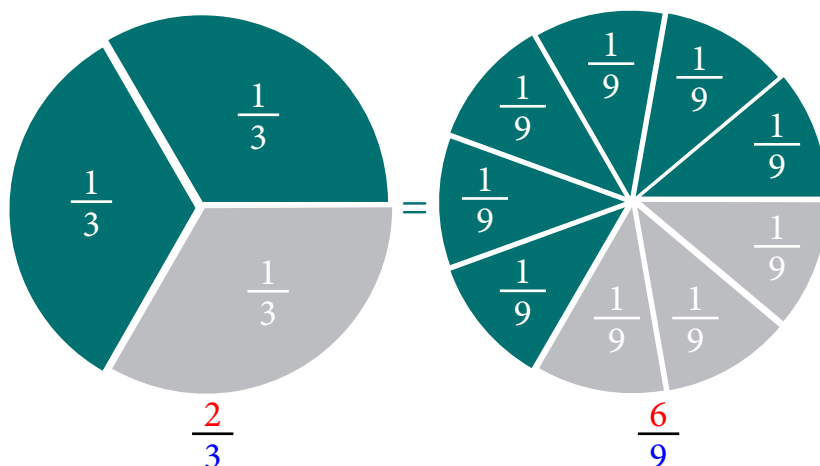
Hemos creado fracciones equivalentes ya que:

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$$

Hemos dividido *un* tercio en *tres* partes iguales, lo cual es equivalente a *multipl-*
car por 3 el numerador y denominador de la fracción.

Para crear el triple de fracciones.
 $\frac{1}{3} = \frac{1 \times 3}{3 \times 3} = \frac{3}{9} \rightarrow \frac{1}{3} = \frac{3}{9}$
 Para hacer las fracciones de la tercera parte de tamaño.

Tomamos dos tercios
que es equivalente a
seis novenos.



Fracciones equivalentes utilizando la multiplicación y división

Multiplicando el numerador y el denominador de una fracción por el mismo número creamos una fracción equivalente como hemos demostrado.

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \times 3}{5 \times 3} = \frac{6}{15} \rightarrow \frac{2}{5} = \frac{6}{15} \quad \frac{2}{5} = \frac{2 \times 4}{5 \times 4} = \frac{8}{20} \rightarrow \frac{2}{5} = \frac{8}{20}$$

$$\frac{3}{9} = \frac{3 \times 2}{9 \times 2} = \frac{6}{18} \rightarrow \frac{3}{9} = \frac{6}{18} \quad \frac{3}{9} = \frac{3 \times 3}{9 \times 3} = \frac{9}{27} \rightarrow \frac{3}{9} = \frac{9}{27}$$

La *división* es la operación *inversa* de la *multiplicación*, por lo cual si dividimos el numerador y el denominador de una fracción entre el mismo número, también creamos fracciones equivalentes.

$$\frac{6}{18} \div 2 = \frac{3}{9} \rightarrow \frac{6}{18} = \frac{3}{9} \quad \frac{6}{18} \div 3 = \frac{2}{6} \rightarrow \frac{6}{18} = \frac{2}{6}$$

$$\frac{3}{9} \div 3 = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{6}{18} = \frac{3}{9} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Simplificación de fracciones

Cuando creamos fracciones equivalentes dividiendo el numerador y el denominador por el mismo número, simplificamos la fracción.

Para hacer más sencillo el proceso de simplificar una fracción, las divisiones las hacemos mentalmente.

Cuando una fracción puede simplificarse varias veces utilizamos el siguiente procedimiento haciendo las divisiones mentalmente.

Dividimos entre 2. Dividimos entre 2. Dividimos entre 2.

$$\frac{16}{24} = \frac{8}{12} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Cada vez que dividimos el numerador y el denominador por el mismo número, creamos una fracción equivalente.

$$\frac{16}{24} = \frac{8}{12} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Dividimos entre 3. Dividimos entre 2.

$$\frac{18}{42} = \frac{3}{7} \rightarrow \frac{18}{42} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$$

Unidad Compuesta de un Número Fraccionario

Quinto al Séptimo Niveles de Abstracción

Unidad compuesta

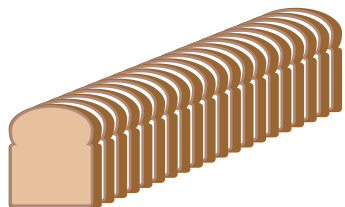
La unidad de una fracción es *compuesta* cuando el *número* o el *conjunto* de objetos que fraccionamos es *mayor a 1*.



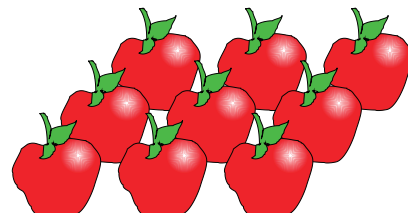
Unidad
Compuesta de 6 niños.



Unidad
Compuesta de 9 sillas.



Unidad
Compuesta de 20 rebanadas.



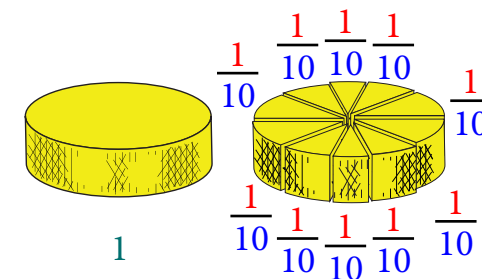
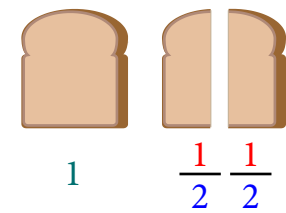
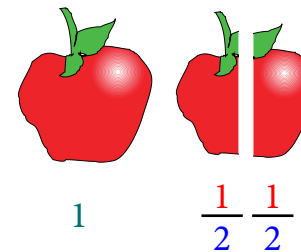
Unidad
Compuesta de 9 manzanas.



Unidad
Compuesta de 5 quesos.

Elementos de una unidad compuesta

Cada uno de los elementos de una *unidad compuesta* puede también ser dividido en fracciones.

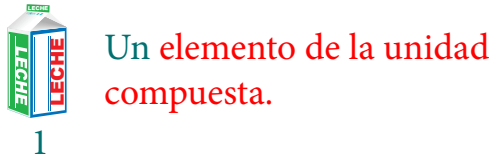


Una vez que dividimos en fracciones los elementos de la *unidad compuesta*, cada uno de los elementos se comporta como una *unidad simple*.

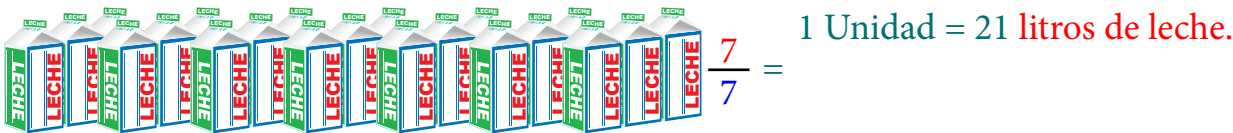
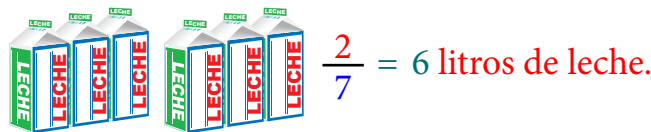
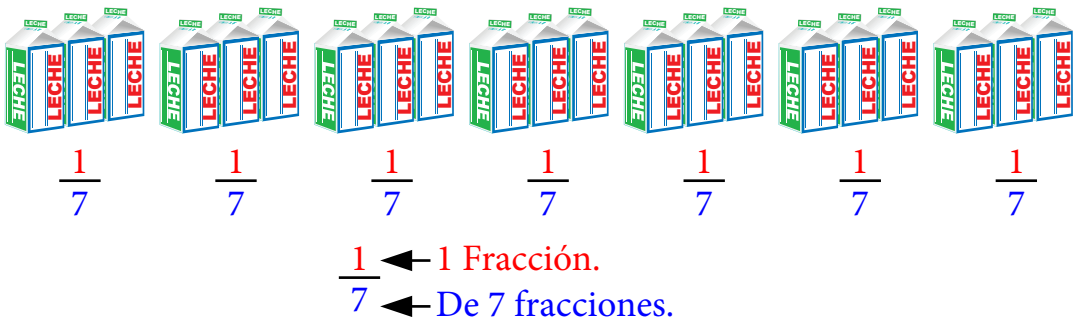
Por esta razón un problema en el que la *unidad* es *compuesta* y a su vez sus elementos están divididos en fracciones, en este problema se combinan la *unidad compuesta* con una *unidad simple* repetida varias veces.

Notación de fracción cuando la unidad es compuesta

Si la unidad es *compuesta*, debemos claramente especificar en cuántas partes la dividimos y de ese total de partes cuántas partes tomamos.



Dividimos la unidad en *siete* partes del mismo tamaño.



Unidades simples y compuestas combinadas

Cuando la unidad es *compuesta*, en algunas ocasiones necesitamos combinarla con una unidad *simple*.

Por ejemplo, tenemos un pan que está cortado en 22 rebanadas. Queremos saber cuántas rebanadas son *tres cuartos* del pan.



Se trata de fracciones cuya unidad es *compuesta*, ya que el pan está *compuesto* de 22 rebanas.

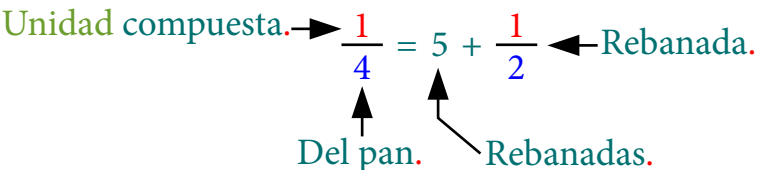
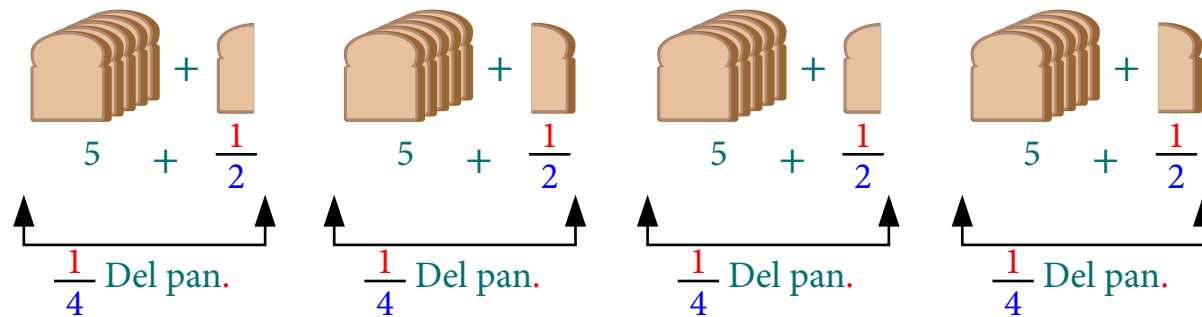
Dividimos en *cuatro* partes iguales para formar *cuartos* de la unidad.



Las *dos* rebanadas que sobran las dividimos a la *mitad*, para tener *cuatro* mitades.



Formamos *cuatro* fracciones iguales, del mismo tamaño, forma y cantidad.



Cada una de las rebanada de pan es una unidad simple. Expresamos la fracción en notación mixta.

$$\text{Entero.} \rightarrow 5 + \frac{1}{2} = 5 \frac{1}{2}$$

↑
Fracción.

Cuando trabajamos con fracciones es muy importante que claramente especifiquemos qué es la *unidad*. Si se trata de una *unidad simple* o *compuesta*.

En el ejemplo anterior el *pan completo* es una *unidad compuesta*, sin embargo, cada una de las *rebanadas* son *unidades simples*.

$$5 + \frac{1}{2} \leftarrow \text{Unidad.}$$

↑
Unidades.

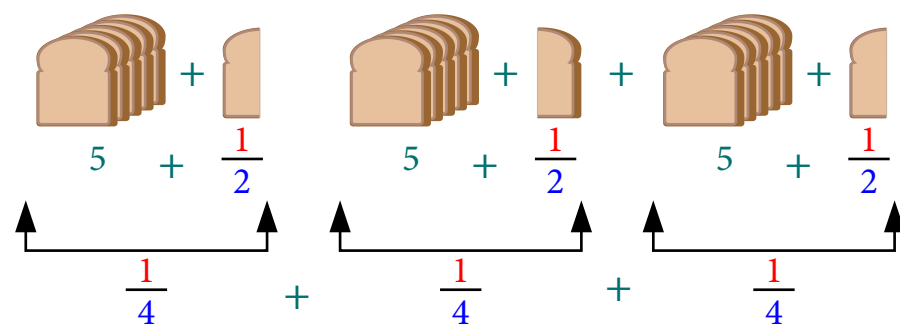
Por eso es posible decir que: $\frac{1}{4} = 5 + \frac{1}{2}$ ← Fracción de la unidad simple.

↑
Fracción de la unidad compuesta.

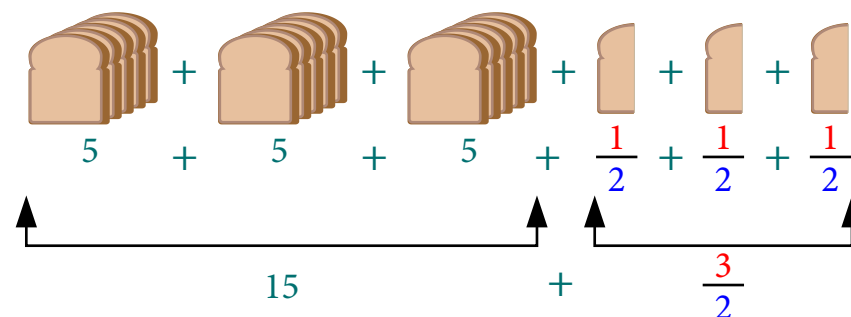
↑
Unidad simple repetida varias veces.

$$\frac{1}{4} = 5 + \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{4} = 5 \frac{1}{2}$$

Ahora que ya conocemos cuántas rebanadas son *un cuarto* del pan, podemos calcular cuántas rebanadas son *tres cuartos* del pan.



Sumamos las rebanas y las mitades de rebanada.



Expresamos la fracción *impropia* en notación *mixta*. $\frac{3}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = 1 \frac{1}{2}$

$$\frac{3}{4} = 15 + 1 + \frac{1}{2} = 16 + \frac{1}{2} = 16 \frac{1}{2}$$

↑
Del pan.

↑
Rebanadas.

Para hacer la solución aritmética dividimos el número total de rebanadas entre *cuatro*, ya que queremos formar *cuartos* de la unidad compuesta.

$$4 \overline{) 22} \rightarrow \frac{1}{4} = 5 + \frac{2}{4} = 5 + \frac{1}{2}$$

Podemos también hacer la división utilizando notación de fracción.

$$\frac{1}{4} = \frac{22}{4} = \frac{20+2}{4} = \frac{20}{4} + \frac{2}{4} = 5 + \frac{2}{4} = 5 + \frac{1}{2}$$

↑
Del pan.

↑
Divididas en 4 partes iguales.

↑
Rebanadas de pan.

Tomamos *tres cuartos* del total del pan.

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{4} \times 3 = 5 \times 3 + \frac{1 \times 3}{2} = 15 + \frac{3}{2}$$

Expresamos la fracción *impropia* en notación *mixta* y efectuamos la suma.

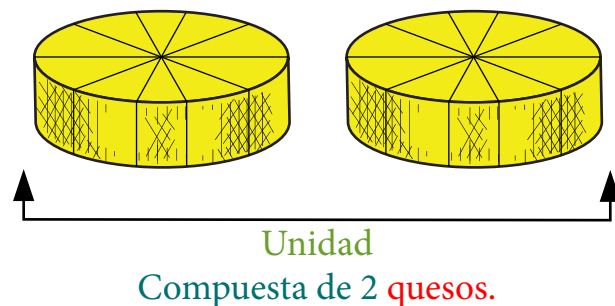
$$\frac{3}{4} = 15 + \frac{3}{2} = 15 + 1 + \frac{1}{2} = 16 \frac{1}{2}$$

Otros ejemplos de unidades simples y compuestas combinadas

Otros dos *ejemplos* en los cuales la unidad es *compuesta* y cada una de las partes que la componen son unidades *simples*. Hacemos la solución con dibujos y aritméticamente.

Tenemos dos quesos. Cada uno está dividido en diez rebanadas.

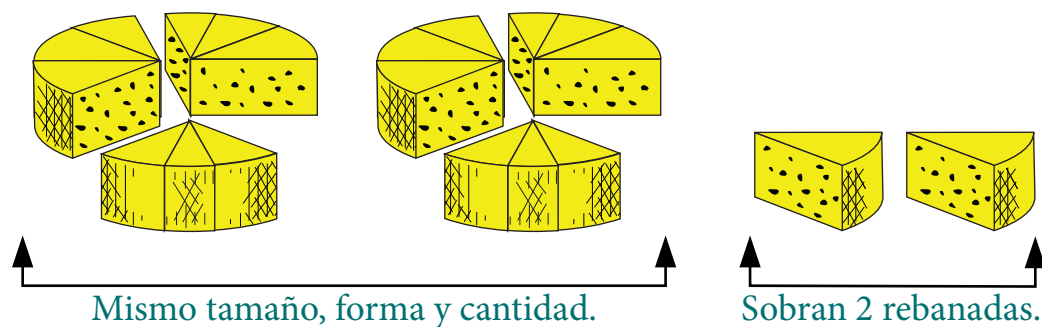
La unidad es compuesta.



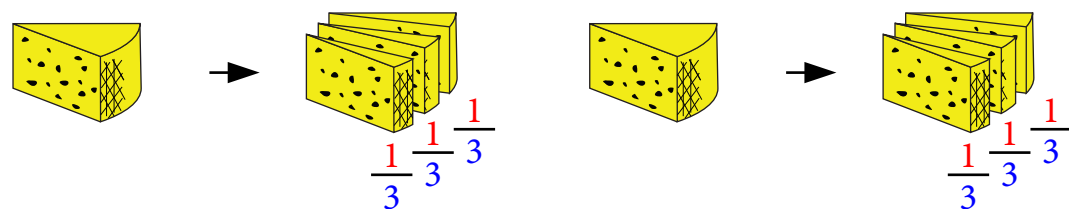
Primera Pregunta.

¿Cuántas rebanadas son **cinco sextos**?

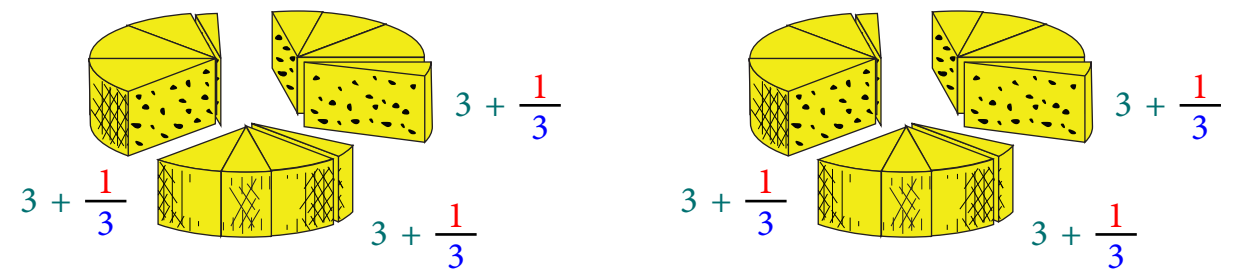
Tenemos que dividir la unidad en *seis partes iguales* en forma, tamaño y cantidad.



Cada una de las rebanadas que sobran las dividimos en tres partes iguales, para tener *seis tercios* de rebanada.

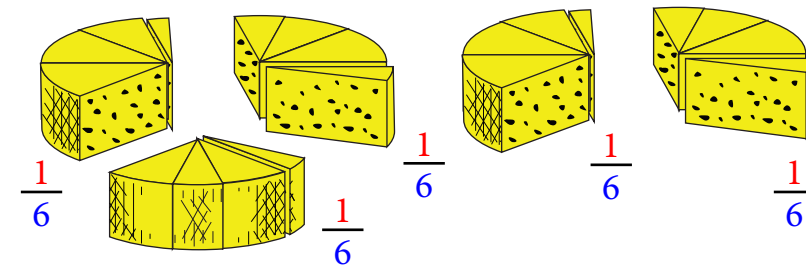


Cada uno de los *seis tercios* de rebanada, lo acomodamos para formar seis fracciones de la misma forma, tamaño y cantidad.

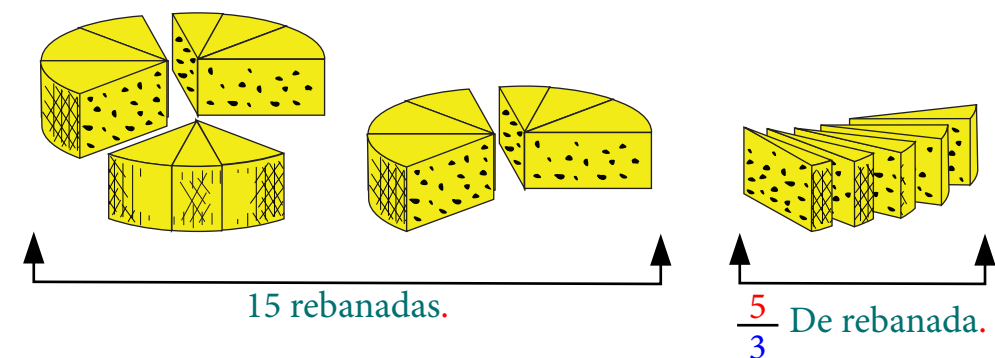


Las *seis* fracciones son iguales en forma, tamaño y cantidad.

Tomamos **cinco sextos** del total de las fracciones.



Acomodamos las rebanadas completas y las fracciones de rebanada.



$$\frac{5}{6} = 15 + \frac{5}{3} \leftarrow \begin{array}{l} \text{Fracción de la unidad simple.} \\ \text{Unidad simple repetida varias veces.} \end{array}$$

Expresamos la fracción impropia en notación mixta. $\frac{5}{3} = \frac{3+2}{3} = \frac{3}{3} + \frac{2}{3} = 1 + \frac{2}{3}$

Efectuamos la suma de fracciones. $15 + \frac{5}{3} = 15 + 1 + \frac{2}{3} = 16 + \frac{2}{3}$

Cinco sextos del total de las rebanadas de los quesos es: $\frac{5}{6} = 16 + \frac{2}{3} = 16 \frac{2}{3}$

Para hacer la solución aritmética dividimos el número total de rebanadas entre seis, ya que queremos formar sextos de la unidad compuesta.

$$\begin{array}{r} 3 \\ 6 \overline{)20} \\ \underline{-18} \\ 2 \end{array} \rightarrow \frac{1}{6} = 3 + \frac{2}{6} = 3 + \frac{1}{3}$$

Multiplicamos un sexto de los quesos por 5 para saber cuántas rebanas de queso son cinco sextos.

$$\frac{5}{6} = \frac{1}{6} \times 5 = 5 \times 3 + \frac{1 \times 5}{3} = 15 + \frac{5}{3}$$

Expresamos la fracción impropia en notación mixta y efectuamos la suma.

$$\frac{5}{6} = 15 + \frac{5}{3} = 15 + 1 + \frac{2}{3} = 16 \frac{2}{3}$$

Podemos también hacer la división utilizando notación de fracción.

$$\frac{1}{6} \rightarrow \frac{20}{6} = \frac{18+2}{6} = \frac{18}{6} + \frac{2}{6} = 3 + \frac{2}{6} = 3 + \frac{1}{3}$$

Rebanadas de queso.
Divididas en 6 partes iguales.
De los quesos.

Multiplicamos un sexto de los quesos por 5 para saber cuántas rebanas de queso son cinco sextos.

$$\frac{5}{6} = \frac{1}{6} \times 5 = 3 \times 5 + \frac{2 \times 5}{6} = 15 + \frac{10}{6}$$

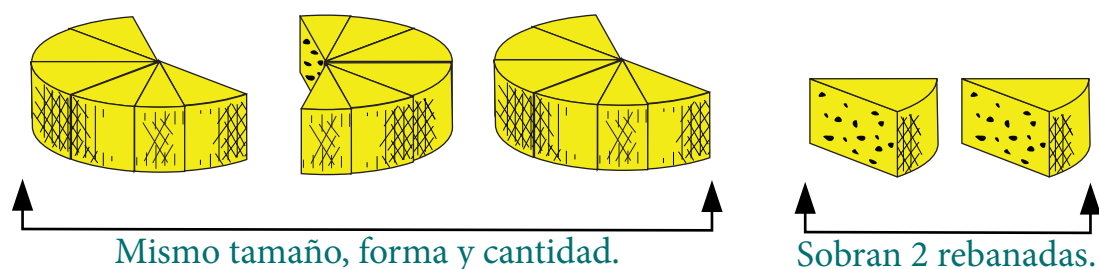
Expresamos la fracción impropia en notación mixta y efectuamos la suma.

$$\frac{5}{6} = 15 + \frac{10}{6} = 15 + 1 + \frac{4}{6} = 16 \frac{2}{3}$$

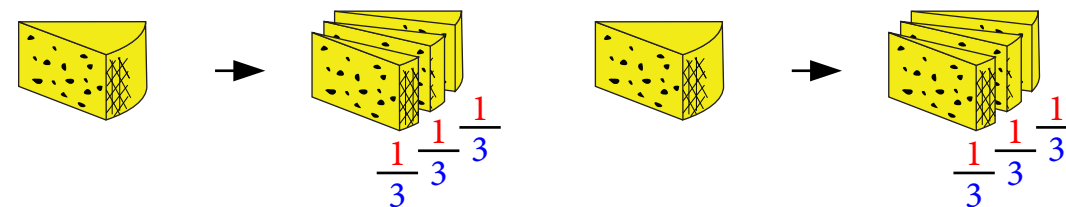
Segunda Pregunta.

¿Cuántas rebanadas son dos tercios?

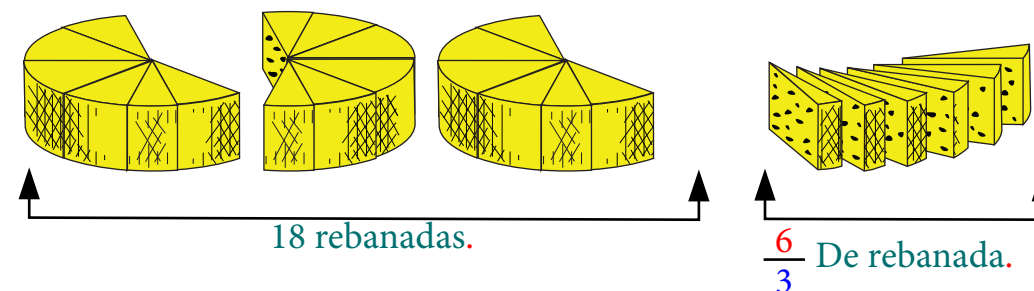
Tenemos que dividir la unidad en tres partes iguales en forma, tamaño y cantidad.



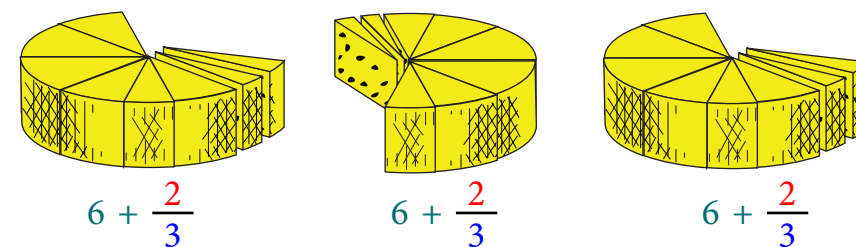
Cada una de las rebanadas que sobran las dividimos en tres partes iguales, para tener seis tercios de rebanada y los distribuimos en las tres fracciones.



Las tres partes iguales tiene en total 18 rebanadas y seis tercios de rebanada.

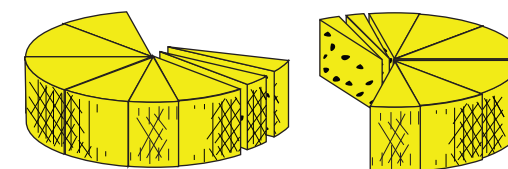


Acomodamos las rebanadas completas y las fracciones de rebanada.



Las tres fracciones son iguales en forma, tamaño y cantidad.

Tomamos dos tercios del total de las fracciones.



$$\frac{2}{3} = 12 + \frac{4}{3}$$

Fracción de la unidad compuesta. Unidad simple repetida varias veces. Fracciones de la unidad simple.

Expresamos la fracción impropia en notación mixta.

$$\frac{4}{3} = \frac{3+1}{3} = \frac{3}{3} + \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{3}$$

Efectuamos la suma de fracciones.

$$12 + \frac{4}{3} = 12 + 1 + \frac{1}{3} = 13 + \frac{1}{3}$$

Dos tercios del total de las rebanadas de los quesos es:

$$\frac{2}{3} = 13 + \frac{1}{3} = 13 \frac{1}{3}$$

Para hacer la solución aritmética dividimos el número total de rebanadas entre tres, ya que queremos formar tercios de la unidad compuesta.

$$\begin{array}{r} 6 \\ 3 \overline{)20} \\ \underline{-18} \\ 2 \end{array} \rightarrow \frac{1}{3} = 6 + \frac{2}{3}$$

Multiplicamos un tercio de los quesos por 2 para saber cuántas rebanas de queso son dos tercios.

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \times 2 = 6 \times 2 + \frac{2 \times 2}{3} = 6 + \frac{4}{3}$$

Expresamos la fracción impropia en notación mixta y efectuamos la suma.

$$\frac{2}{3} = 12 + \frac{4}{3} = 12 + 1 + \frac{1}{3} = 13 \frac{1}{3}$$

Podemos también hacer la división utilizando notación de fracción.

$$\frac{1}{3} \xrightarrow{\text{De los quesos.}} \frac{20}{3} = \frac{18+2}{3} = \frac{18}{3} + \frac{2}{3} = 6 + \frac{2}{3} = 6 + \frac{2}{3}$$

Rebanadas de queso.

Divididas en 3 partes iguales.

Multiplicamos un tercio de los quesos por 3 para saber cuántas rebanas de queso son dos tercios.

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \times 2 = 6 \times 2 + \frac{2 \times 2}{3} = 12 + \frac{4}{3}$$

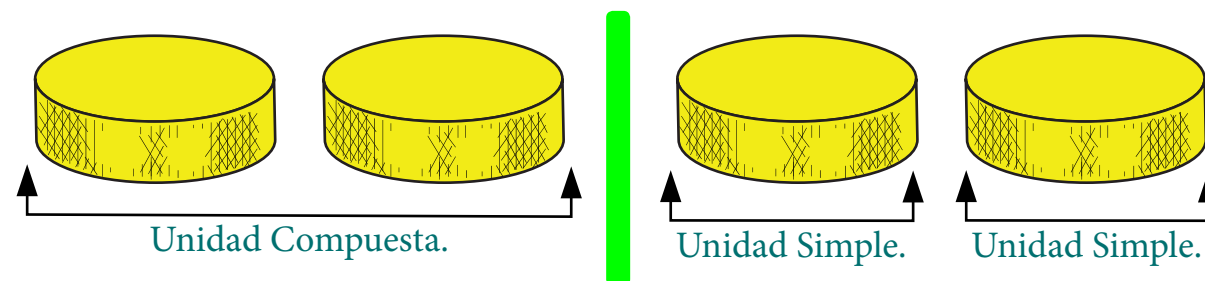
Expresamos la fracción impropia en notación mixta y efectuamos la suma.

$$\frac{2}{3} = 12 + \frac{4}{3} = 12 + 1 + \frac{1}{3} = 13 \frac{1}{3}$$

Comparación de Unidades Simples Repetidas Varias Veces y Unidades Compuestas

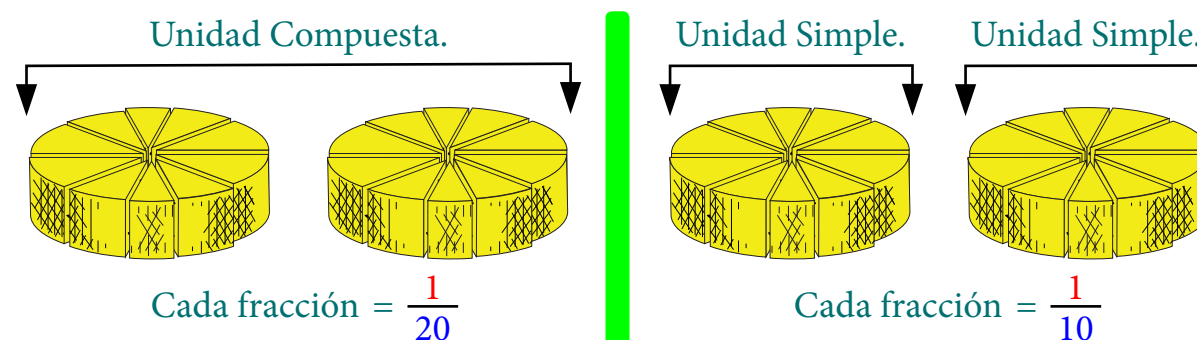
Como hemos visto es muy importante definir claramente la *unidad* antes de hacer las fracciones. De la forma como la *unidad* está definida dependen las fracciones.

Por ejemplo, tenemos *dos quesos*. En el primer caso los dos quesos forman *una unidad compuesta*, y en el segundo caso *cada queso* es *una unidad simple*, es decir, la unidad simple repetida dos veces.



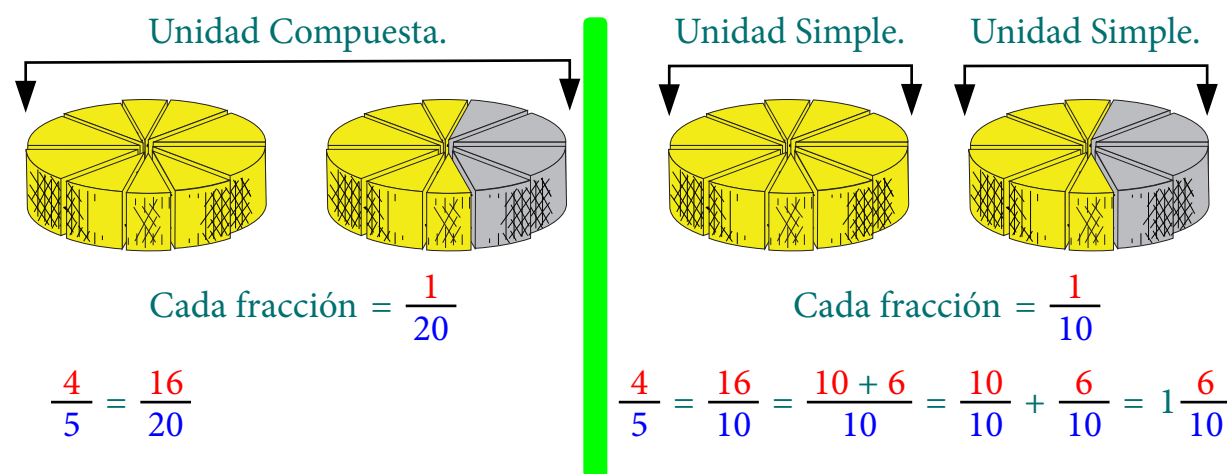
Dividimos cada uno de los quesos en diez partes iguales.

En la unidad *compuesta* cada una de las fracciones es *una* de *veinte*, mientras que en la unidad *simple* repetida dos veces cada una de las fracciones es *una* de *diez*.



En ambos casos queremos conocer que fracción de la unidad es *cuatro quintos*.

En ambos casos *cuatro quintos* representa el *mismo número de rebanadas*, sin embargo *no la misma fracción*, ya que en el primer caso ambos quesos son la unidad y en el segundo caso cada uno de los quesos es una unidad que está repetida.



Números racionales

Un número fraccionarios o fracción es la relación entre dos números: el **numera-**
dor y el **denominador**.

$\frac{2}{5}$ ← Esta fracción contiene 2 partes,
 $\frac{2}{5}$ ← De un total de 5 partes.

Relación significa lo mismo que la palabra razón, por eso a las fracciones también les llamamos números racionales.

Un número racional expresa la razón o relación que el **numerador** tiene con el **denominador**.

Todos los números naturales son racionales, ya que sí podemos expresarlos como la relación entre dos números: el **numerador** y el **denominador**.

$$\frac{1}{1} \quad \frac{3}{1} \quad \frac{4}{1} \quad \frac{7}{1} \quad \frac{9}{1} \quad \frac{14}{1} \quad \frac{23}{1} \quad \frac{48}{1} \quad \frac{75}{1} \quad \frac{92}{1} \quad \frac{349}{1} \quad \frac{785}{1} \quad \frac{826}{1}$$

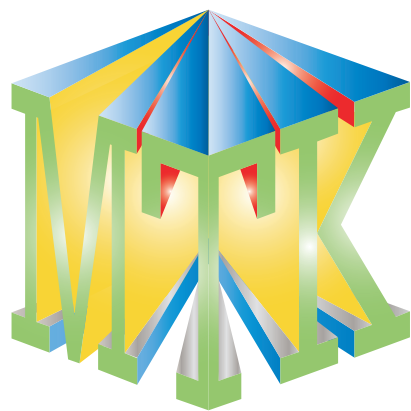
Números irracionales

Cuando un número no es posible expresarlo como la relación o razón del **nume-**
rador y el **denominador**, le llamamos *irracional*.

Se llaman *irracionales* por *no* tener una *razón –relación–* entre el **numerador** y el **denominador**.

El número irracional más famoso es el número π .

Capítulo 7



Números Fraccionarios
Suma y Resta

Algoritmo de la Suma y Resta de Fracciones

Tercer Nivel de Abstracción

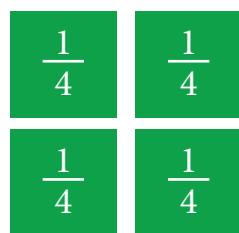
Concepto de suma y resta de fracciones

Los números fraccionarios están compuestos de **numerador** y **denominador**.

El numerador indica la cantidad de partes o fracciones que tomamos y el denominador en cuántas partes hemos dividido la unidad, es decir, de qué tamaño son las fracciones.

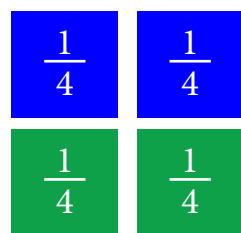


Unidad



4 Fracciones

La unidad la dividimos en 4 partes.

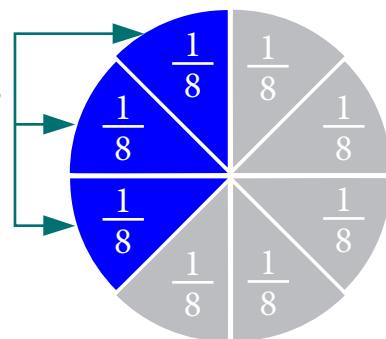


Tomamos 2 partes, es decir, 2 fracciones.

$$\frac{2}{4}$$

$\frac{3}{8}$ ← Numerador.
← Denominador.

3 fracciones de tamaño 8.

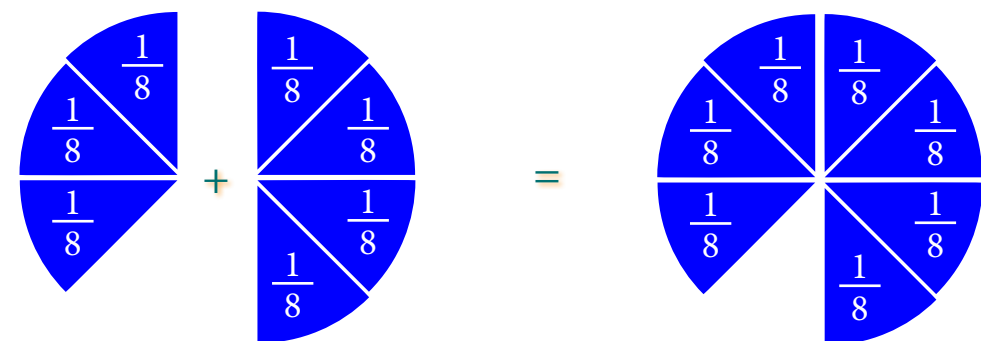


Primer Paso

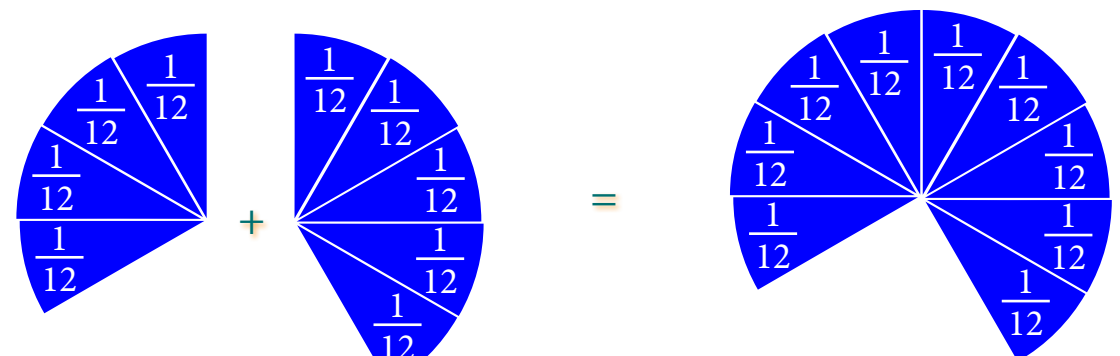
Suma de fracciones del mismo tamaño o mismo denominador

Solamente podemos sumar y restar fracciones que son del mismo **tamaño**, es decir, que tienen el mismo **denominador**.

Cuando todas las fracciones que sumamos o restamos tienen el mismo **denominador**, a este **denominador** le llamamos **común denominador**.

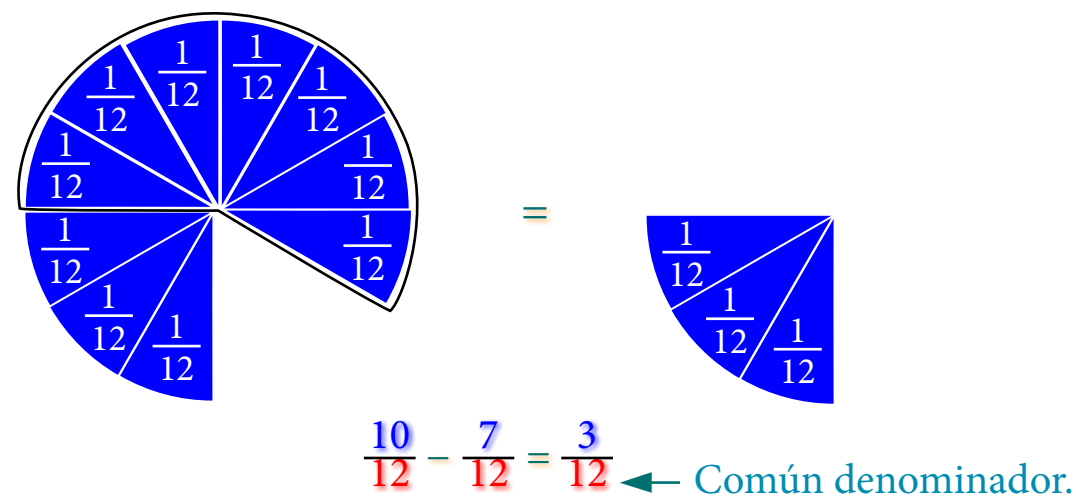
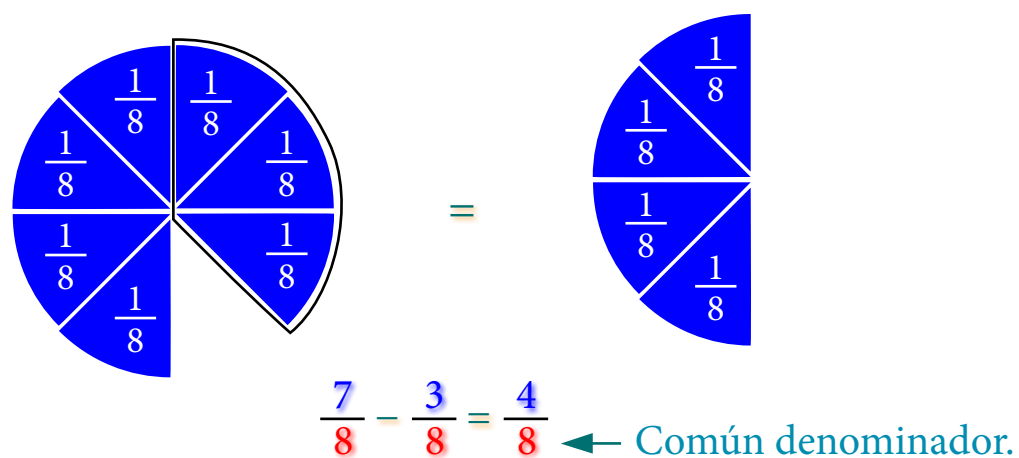


$$\frac{3}{8} + \frac{4}{8} = \frac{7}{8} \leftarrow \text{Común denominador.}$$



$$\frac{4}{12} + \frac{5}{12} = \frac{9}{12} \leftarrow \text{Común denominador.}$$

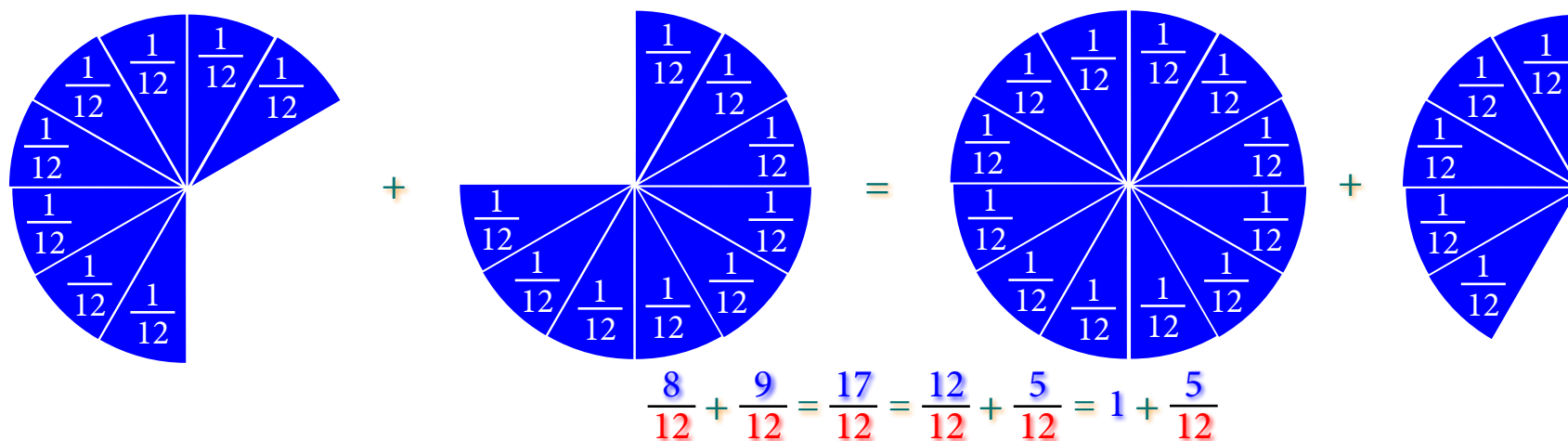
Lo mismo sucede para el caso de la resta. Cuando las fracciones tienen un **común denominador**, es decir, son del **mismo tamaño**, se pueden restar.



Segundo Paso

Suma de fracciones impropias

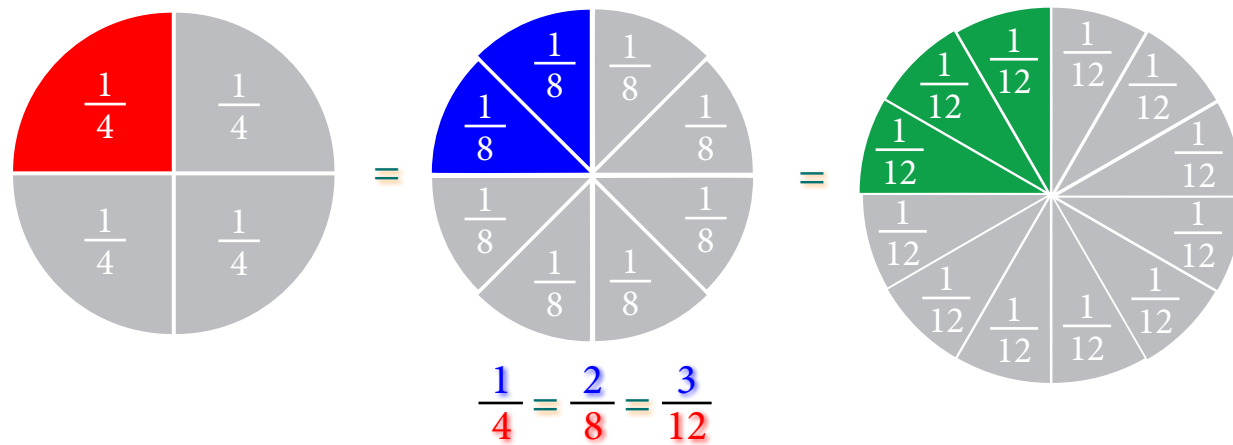
Cuando sumamos fracciones y el resultado es una fracción impropia, utilizamos la notación mixta para expresarlo.



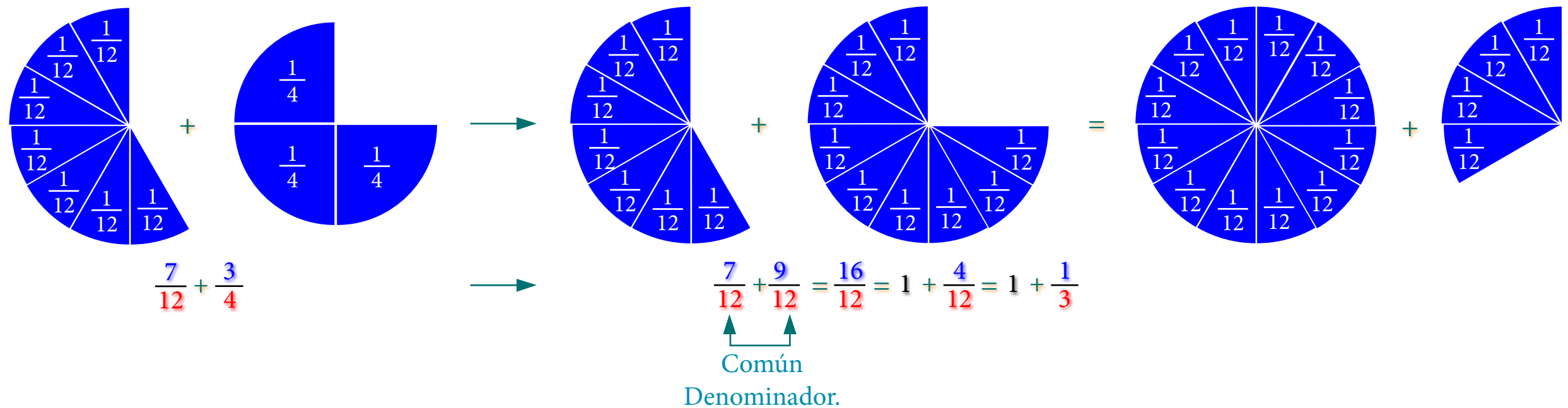
Tercer Paso

Suma de fracciones cuando los denominadores son diferentes

Cuando los denominadores de las fracciones que queremos sumar son diferentes, utilizamos el concepto de fracción equivalente para hacer todos los denominadores iguales, es decir, el común denominador.



Sumamos:



Cuarto Paso

Procedimiento para hacer todos los denominadores iguales

Hacer los denominadores iguales, es decir, con un común denominador, consiste en hacer las fracciones del mismo tamaño, para lo cual multiplicamos el numerador y el denominador por la misma cantidad.

$$\frac{7}{12} + \frac{3}{4} = \frac{7}{12} + \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{7}{12} + \frac{9}{12} = \frac{16}{12} = \frac{12}{12} + \frac{4}{12} = 1 + \frac{1}{3}$$

↑ ↑
Común
Denominador.

Algoritmo de los cuatro pasos utilizando el método rápido

Para sumar y restar fracciones utilizando el método rápido, aplicamos los siguientes pasos.

Primer paso

Encontrar el mínimo común denominador –mcd–.

Segundo paso

Multiplicar el numerador y denominador por la cantidad adecuada para que todas las fracciones tengan el mínimo común denominador.

Tercer paso

Sumar y restar los numeradores.

Cuarto paso

Si es posible, expresar el resultado en notación mixta y simplificar.

Sumar las fracciones: $\frac{2}{5} + \frac{7}{10}$

Primer paso

Encontrar el mínimo común denominador –mcd–.

$$\text{mcd} = 10.$$

Segundo paso

Multiplicar el numerador y denominador por la cantidad adecuada para que todas las fracciones tengan el mínimo común denominador.

$$\frac{2}{5} + \frac{7}{10} = \frac{2 \times 2}{5 \times 2} + \frac{7}{10} = \frac{4}{10} + \frac{7}{10}$$

↑ ↑
Común Denominador.

Tercer paso

Sumar y restar los numeradores.

$$\frac{4}{10} + \frac{7}{10} = \frac{11}{10}$$

Cuarto paso

Si es posible, expresar el resultado en notación mixta y simplificar.

$$\frac{11}{10} = \frac{10}{10} + \frac{1}{10} = 1 + \frac{1}{10} = 1 \frac{1}{10}$$

Restar las fracciones: $\frac{3}{4} - \frac{5}{12}$

Primer paso

Encontrar el mínimo común denominador –mcd–.

$$\text{mcd} = 12.$$

Segundo paso

Multiplicar el numerador y denominador por la cantidad adecuada para que todas las fracciones tengan el mínimo común denominador.

$$\frac{3}{4} - \frac{5}{12} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} - \frac{5}{12} = \frac{9}{12} - \frac{5}{12}$$

↑ ↑
Común Denominador.

Tercer paso

Sumar y restar los numeradores.

$$\frac{9}{12} - \frac{5}{12} = \frac{4}{12}$$

Cuarto paso

Si es posible, expresar el resultado en notación mixta y simplificar.

$$\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Quinto Paso

Calcular el mínimo común denominador mentalmente

Sumar las fracciones: $\frac{3}{8} + \frac{9}{16} + \frac{5}{4}$

Primer paso

Encontrar mentalmente el mínimo común denominador –mcd–.

$$\text{mcd} = 16.$$

Segundo paso

Multiplicar el numerador y denominador por la cantidad adecuada para que todas las fracciones tengan el mínimo común denominador.

$$\frac{3}{8} + \frac{9}{16} + \frac{5}{4} = \frac{3 \times 2}{8 \times 2} + \frac{9}{16} + \frac{5 \times 4}{4 \times 4} = \frac{6}{16} + \frac{9}{16} + \frac{20}{16}$$

↑ ↑ ↑
Común Denominador.

Tercer paso

Sumar y restar los numeradores.

$$\frac{6}{16} + \frac{9}{16} + \frac{20}{16} = \frac{35}{16}$$

Cuarto paso

Si es posible, expresar el resultado en notación mixta y simplificar.

$$\frac{35}{16} = \frac{32}{16} + \frac{3}{16} = 2 + \frac{3}{16} = 2 \frac{3}{16}$$

Sumar las fracciones: $\frac{5}{2} + \frac{7}{12} + \frac{4}{3}$

Primer paso

Encontrar mentalmente el mínimo común denominador –mcd–.

$$\text{mcd} = 12.$$

Segundo paso

Multiplicar el numerador y denominador por la cantidad adecuada para que todas las fracciones tengan el mínimo común denominador.

$$\frac{5}{2} + \frac{7}{12} + \frac{4}{3} = \frac{5 \times 6}{2 \times 6} + \frac{7}{12} + \frac{4 \times 4}{3 \times 4} = \frac{30}{12} + \frac{7}{12} + \frac{16}{12}$$


Común Denominador.

Tercer paso

Sumar y restar los numeradores.

$$\frac{30}{12} + \frac{7}{12} + \frac{16}{12} = \frac{53}{12}$$

Cuarto paso

Si es posible, expresar el resultado en notación mixta y simplificar.

$$\frac{53}{12} = \frac{48}{12} + \frac{5}{12} = 4 + \frac{5}{12} = 4 \frac{5}{12}$$

Cuarto Nivel de Abstracción

Sexto Paso

Algoritmo de los cuatro pasos utilizando el método tradicional

Para sumar y restar fracciones utilizando el método tradicional, aplicamos los siguientes pasos.

Sumar las fracciones: $\frac{2}{5} + \frac{7}{10} + \frac{3}{4}$

Primer paso

Encontrar el mínimo común denominador –mcd–.

$$\text{mcd} = 20.$$

Segundo paso

Dividir el mínimo común denominador entre cada uno de los denominadores y el resultado multiplicarlo por cada uno de los numeradores.

$$\frac{2}{5} + \frac{7}{10} + \frac{3}{4} = \frac{2 \times 4 + 7 \times 2 + 3 \times 5}{20} = \frac{8 + 14 + 15}{20}$$

Diagram illustrating the second step: finding the multiplier for each denominator to reach the common denominator 20.

- $\frac{20}{5} = 4$ (multiplier for 5)
- $\frac{20}{10} = 2$ (multiplier for 10)
- $\frac{20}{4} = 5$ (multiplier for 4)

Tercer paso

Sumar y restar los numeradores.

$$\frac{8 + 14 + 15}{20} = \frac{37}{20}$$

Cuarto paso

Si es posible, expresar el resultado en notación mixta y simplificar.

$$\frac{37}{20} = \frac{20}{20} + \frac{17}{20} = 1 + \frac{17}{20} = 1 \frac{17}{20}$$

Sumar y restar las fracciones: $\frac{9}{10} + \frac{17}{30} - \frac{6}{15}$

Primer paso

$$\text{mcd} = 30.$$

Segundo paso

$$\frac{9}{10} + \frac{17}{30} - \frac{6}{15} = \frac{9 \times 3 + 17 \times 1 - 6 \times 2}{30} = \frac{27 + 17 - 12}{30}$$

Diagram illustrating the second step: finding the multiplier for each denominator to reach the common denominator 30.

- $\frac{30}{10} = 3$ (multiplier for 10)
- $\frac{30}{30} = 1$ (multiplier for 30)
- $\frac{30}{15} = 2$ (multiplier for 15)

Tercer paso

$$\frac{27 + 17 - 12}{30} = \frac{32}{30}$$

Cuarto paso

$$\frac{32}{30} = \frac{16}{15} = \frac{15}{15} + \frac{1}{15} = 1 + \frac{1}{15} = 1 \frac{1}{15}$$

Séptimo Paso

Suma y resta de fracciones utilizando el algoritmo de los cinco pasos para encontrar el mínimo común denominador

Calculamos el mínimo común denominador utilizando el algoritmo de los cinco pasos. Sumamos y restamos las fracciones utilizando el método rápido o el método tradicional.

Efectuar la suma de fracciones usando el método rápido. Calcular el mínimo común denominador utilizando el algoritmo de los cinco pasos. Simplificar.

$$\frac{12}{45} + \frac{18}{75}$$

Algoritmo para calcular el mínimo común denominador.

Primer paso

Descomponemos los números en sus factores primos.

45	3
15	3
5	5
1	

75	3
25	5
5	5
1	

Segundo paso

Contamos las veces que se repiten los factores primos.

45	3	2 veces.
15	3	
5	5	1 vez.
1		

75	3	1 vez.
25	5	2 veces.
5	5	
1		

Tercer paso

Seleccionamos un representante de cada uno de los factores primos que no se repiten en ninguno de los números.

Ningún factor no se repite.

Cuarto paso

Escogemos los grupos de factores primos que se repiten más veces.

3, 3 y 5, 5.

Quinto paso

El mínimo común múltiplo –mcm– es el producto de los factores primos seleccionados.

$$\text{mcd} = 3 \times 3 \times 5 \times 5 = 225$$

Utilizamos el método rápido para efectuar la suma de fracciones.

$$\frac{12}{45} + \frac{18}{75} = \frac{12 \times 5}{45 \times 5} + \frac{18 \times 3}{75 \times 3} = \frac{60}{225} + \frac{54}{225} = \frac{114}{225} = \frac{38}{75}$$

Efectuar la resta de fracciones usando el método tradicional. Simplificar.

$$\frac{9}{24} - \frac{7}{36}$$

Algoritmo para calcular el mínimo común denominador.

Primer paso

Descomponemos los números en sus factores primos.

24	2
12	2
6	2
3	3
1	

36	2
18	2
9	3
3	3
1	

Segundo paso

Contamos las veces que se repiten los factores primos.

24	2	3 veces.
12	2	
6	2	
3	3	1 vez.
1		

36	2	2 veces.
18	2	
9	3	2 veces.
3	3	
1		

Tercer paso

Seleccionamos un representante de cada uno de los factores primos que no se repiten en ninguno de los números.

Ningún factor no se repite.

Cuarto paso

Escogemos los grupos de factores primos que se repiten más veces.

2, 2, 2 y 3, 3.

Quinto paso

El mínimo común múltiplo –mcm– es el producto de los factores primos seleccionados.

$$\text{mcd} = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 72$$

Restamos las fracciones usando el método tradicional.

$$\frac{11}{24} - \frac{7}{36} = \frac{33 - 14}{72} = \frac{19}{72}$$

Quinto Nivel de Abstracción

Octavo Paso

Suma y resta de fracciones en notación mixta

Las fracciones en notación mixta, las expresamos como la suma de la parte entera más la fraccionaria.

Efectuar la suma y resta de fracciones: $3\frac{7}{36} + 7\frac{14}{27} + 2\frac{15}{8} - \frac{2}{3}$

Expresamos las fracciones mixtas como la suma de la parte entera más la fraccionaria.

$$3\frac{7}{36} + 7\frac{14}{27} + 2\frac{15}{8} - \frac{2}{3} = 3 + \frac{7}{36} + 7 + \frac{14}{27} + 2 + \frac{15}{8} - \frac{2}{3}$$

$$3\frac{7}{36} + 7\frac{14}{27} + 2\frac{15}{8} - \frac{2}{3} = 12 + \frac{7}{36} + \frac{14}{27} + \frac{15}{8} - \frac{2}{3}$$

Utilizamos el algoritmo para calcular el mínimo común denominador.

$$\begin{array}{l|l} 36 & \begin{array}{l} 2 \leftarrow \\ 2 \leftarrow \\ 3 \leftarrow \\ 3 \leftarrow \\ 1 \end{array} \\ 18 & \\ 9 & \\ 3 & \\ 1 & \end{array} \begin{array}{l} 2 \text{ veces.} \\ \\ 2 \text{ veces.} \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{l|l} 27 & \begin{array}{l} 3 \leftarrow \\ 3 \leftarrow \\ 3 \leftarrow \\ 1 \end{array} \\ 9 & \\ 3 & \\ 1 & \end{array} \begin{array}{l} 3 \text{ veces.} \\ \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{l|l} 8 & \begin{array}{l} 2 \leftarrow \\ 2 \leftarrow \\ 2 \leftarrow \\ 1 \end{array} \\ 4 & \\ 2 & \\ 1 & \end{array} \begin{array}{l} 3 \text{ veces.} \\ \\ \\ \end{array}$$

Calculamos el mínimo común denominador.

$$\text{mcd} = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 216$$

Utilizamos el método rápido, primero sumamos y restamos las fracciones.

$$12 + \frac{7}{36} + \frac{14}{27} + \frac{15}{8} - \frac{2}{3} = 12 + \frac{7 \times 6}{36 \times 6} + \frac{14 \times 8}{27 \times 8} + \frac{15 \times 8}{8 \times 8} - \frac{2 \times 72}{3 \times 72}$$

$$12 + \frac{7}{36} + \frac{14}{27} + \frac{15}{8} - \frac{2}{3} = 12 + \frac{42}{216} + \frac{112}{216} + \frac{405}{216} - \frac{144}{216}$$

$$12 + \frac{7}{36} + \frac{14}{27} + \frac{15}{8} - \frac{2}{3} = 12 + \frac{559}{216} - \frac{144}{216} = 12 + \frac{415}{216}$$

Expresamos la fracción en notación mixta.

$$12 + \frac{7}{36} + \frac{14}{27} + \frac{15}{8} - \frac{2}{3} = 12 + \frac{216}{216} + \frac{199}{216} = 12 + 1 + \frac{199}{216}$$

Efectuamos la suma y expresamos el resultado en notación mixta.

$$12 + \frac{7}{36} + \frac{14}{27} + \frac{15}{8} - \frac{2}{3} = 13 + \frac{199}{216} = 13\frac{199}{216}$$

Ahora efectuamos la suma y resta de fracciones utilizando el método tradicional.

$$12 + \frac{7}{36} + \frac{14}{27} + \frac{15}{8} - \frac{2}{3} = 12 + \frac{7 \times 6 + 14 \times 8 + 15 \times 8 - 2 \times 72}{216}$$

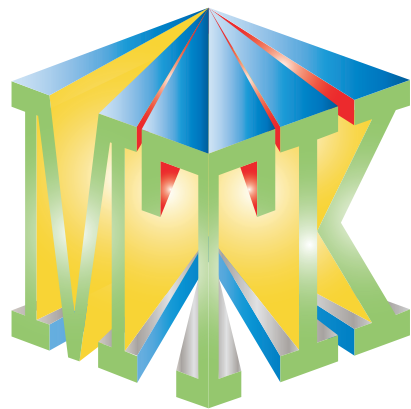
$$12 + \frac{7}{36} + \frac{14}{27} + \frac{15}{8} - \frac{2}{3} = 12 + \frac{42 + 112 + 405 - 144}{216}$$

$$12 + \frac{7}{36} + \frac{14}{27} + \frac{15}{8} - \frac{2}{3} = 12 + \frac{559 - 144}{216} = 12 + \frac{415}{216}$$

$$12 + \frac{7}{36} + \frac{14}{27} + \frac{15}{8} - \frac{2}{3} = 12 + \frac{216}{216} + \frac{199}{216} = 12 + 1 + \frac{199}{216}$$

$$12 + \frac{7}{36} + \frac{14}{27} + \frac{15}{8} - \frac{2}{3} = 13 + \frac{199}{216} = 13\frac{199}{216}$$

Capítulo 8



Números Fraccionarios

Multiplicación

División

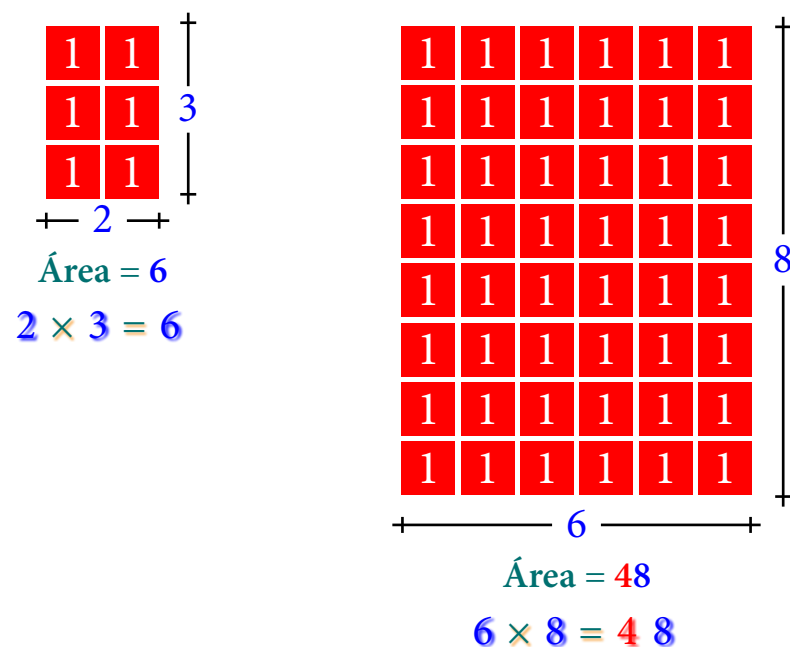
Multiplicación de Fracciones

Quinto Nivel de Abstracción

Concepto de la multiplicación de números naturales

Multiplicar significa sumar en forma rápida las **unidades** de área (**cuadritos**) que hay dentro de un cuadrado o un rectángulo. El número de **unidades** de área (**cuadritos**) que forman un cuadrado o un rectángulo son el área.

De esta forma creamos las tablas de multiplicar.

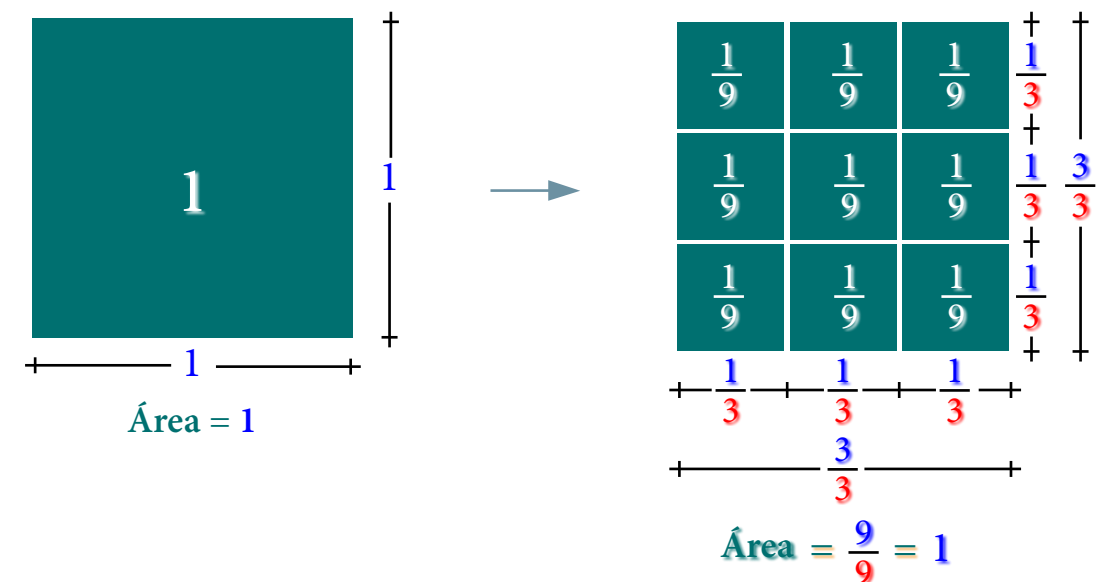


Concepto de la multiplicación de números fraccionarios

El concepto de la multiplicación de dos números fraccionarios, es el mismo que el de dos números naturales, solamente que, en lugar de formar el área con unidades enteras de área, la formamos con unidades de fracción de área.

Para multiplicar dos números fraccionarios, utilizamos un cuadrado o un rectángulo cuya área total es **uno**.

Esta área la dividimos en fracciones de área.



Utilizando el concepto de la multiplicación calculamos el área total multiplicando la longitud de la base por la longitud de la altura.

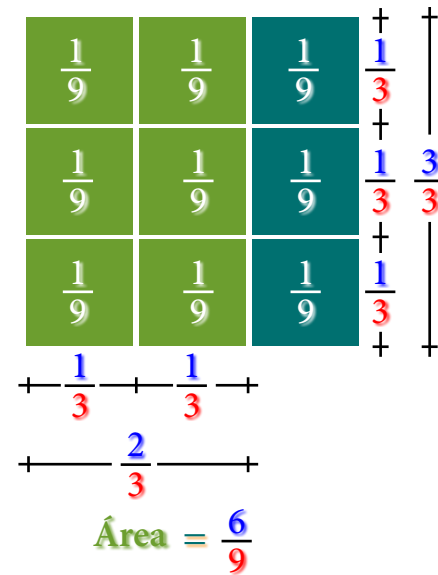
$$\text{Área} = \frac{3}{3} \times \frac{3}{3} = \frac{9}{9} = 1$$

Para efectuar la multiplicación de las fracciones, hemos multiplicado los numeradores y los denominadores.

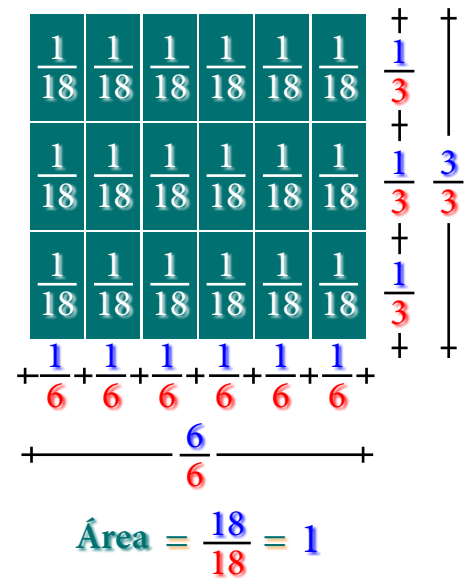
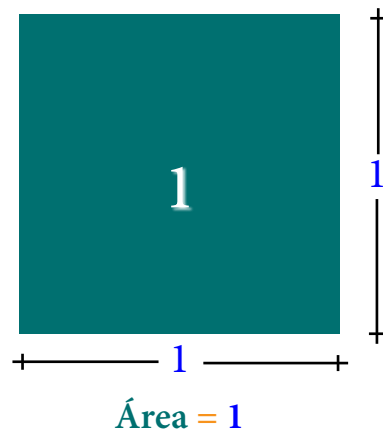
Para verificar que el procedimiento es correcto, tomamos $\frac{6}{9}$ del área total.

$$\text{Área} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{3} = \frac{6}{9}$$

$2 \times 3 = 6$
 $3 \times 3 = 9$



Dividimos la base de la unidad en sextos y la altura en tercios.



$$\text{Área} = \frac{6}{6} \times \frac{3}{3} = \frac{18}{18} = 1$$

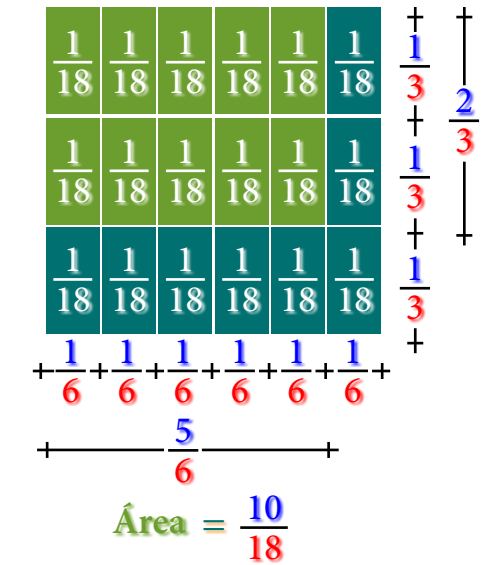
$6 \times 3 = 18$
 $6 \times 3 = 18$

Para efectuar la multiplicación de las fracciones, hemos multiplicado los numeradores y los denominadores.

Para verificar que el procedimiento es correcto, tomamos $\frac{10}{18}$ del área total.

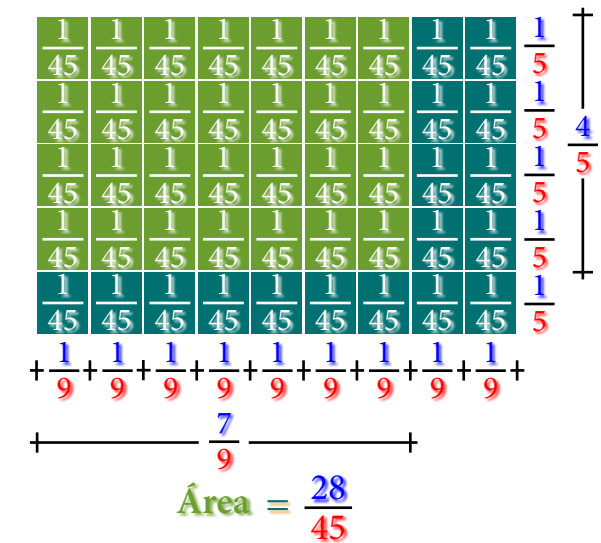
$$\text{Área} = \frac{5}{6} \times \frac{2}{3} = \frac{10}{18}$$

$5 \times 2 = 10$
 $6 \times 3 = 18$



Para efectuar la multiplicación de las fracciones, hemos multiplicado los numeradores y los denominadores.

La unidad puede ser un rectángulo.



$$\text{Área} = \frac{7}{9} \times \frac{4}{5} = \frac{28}{45}$$

$7 \times 4 = 28$
 $9 \times 5 = 45$

Para efectuar la multiplicación de las fracciones, hemos multiplicado los numeradores y los denominadores.

Algoritmo para la multiplicación de fracciones

Para multiplicar fracciones utilizamos el siguiente algoritmo.

Primer paso

Multiplicamos los **numeradores** y el resultado lo escribimos en el **numerador**; multiplicamos los **denominadores** y el resultado lo escribimos en el **denominador**.

Segundo paso

Si el resultado es una fracción impropia, la expresamos en notación mixta y simplificamos.

Multiplicar las fracciones: $\frac{21}{16} \times \frac{8}{7}$

Primer paso

Multiplicamos los **numeradores** y el resultado lo escribimos en el **numerador**; multiplicamos los **denominadores** y el resultado lo escribimos en el **denominador**.

$$\begin{array}{c} 21 \times 8 = 168 \\ \frac{21}{16} \times \frac{8}{7} = \frac{168}{112} \\ 16 \times 7 = 112 \end{array}$$

Segundo paso

Si el resultado es una fracción impropia, la expresamos en notación mixta y simplificamos.

$$\frac{168}{112} = \frac{112}{112} + \frac{56}{112} = 1 + \frac{1}{2} = 1 \frac{1}{2}$$

Multiplicar las fracciones: $\frac{15}{8} \times \frac{10}{9} \times \frac{14}{3}$

Primer paso

Multiplicamos los **numeradores** y el resultado lo escribimos en el **numerador**; multiplicamos los **denominadores** y el resultado lo escribimos en el **denominador**.

$$\begin{array}{c} 15 \times 10 \times 14 = 2,100 \\ \frac{15}{8} \times \frac{10}{9} \times \frac{14}{3} = \frac{2,100}{216} \\ 8 \times 9 \times 3 = 216 \end{array}$$

Segundo paso

Si el resultado es una fracción impropia, la expresamos en notación mixta y simplificamos.

$$\frac{2,100}{216} = \frac{1,944}{216} + \frac{156}{216} = 9 + \frac{13}{18} = 9 \frac{13}{18}$$

Simplificación en la multiplicación

Para simplificar una fracción aplicamos el concepto de fracción equivalente, dividiendo el **numerador** y el **denominador** por el mismo número.

$$\div 3 \left[\begin{array}{c} \frac{2}{6} \\ \frac{12}{18} \\ \frac{9}{3} \end{array} \right] = \frac{2}{3} \longrightarrow \div 6 \left[\begin{array}{c} \frac{2}{12} \\ \frac{12}{18} \\ \frac{3}{3} \end{array} \right] = \frac{2}{3}$$

Para multiplicar fracciones multiplicamos los **numeradores** y los **denominadores**.

$$\frac{25}{12} \times \frac{6}{5} = \frac{25 \times 6}{12 \times 5}$$

La multiplicación es una operación conmutativa ya que: $25 \times 6 = 6 \times 25$, por lo cual:

$$\frac{25 \times 6}{12 \times 5} = \frac{6 \times 25}{12 \times 5}$$

Podemos plantear la multiplicación de fracciones de la siguiente forma:

$$\frac{6 \times 25}{12 \times 5} = \frac{6}{12} \times \frac{25}{5}$$

Simplificamos las fracciones antes de efectuar la multiplicación.

$$\frac{6}{12} \times \frac{25}{5} = \frac{1}{2} \times \frac{5}{1}$$

Efectuamos la multiplicación multiplicando los **numeradores** y los **denominadores**.

$$\frac{1}{2} \times \frac{5}{1} = \frac{5}{2}$$

Expresamos el resultado en notación mixta.

$$\frac{5}{2} = \frac{4}{2} + \frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2} = 2 \frac{1}{2}$$

Sabiendo que tanto en el **numerador** como en el **denominador** todos los factores se están multiplicando, podemos hacer directamente la simplificación.

$$\frac{25}{12} \times \frac{6}{5} = \frac{5}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{5 \times 1}{2 \times 1} = \frac{5}{2} = 2 \frac{1}{2}$$

Multiplicar las fracciones: $\frac{15}{8} \times \frac{10}{9} \times \frac{16}{3}$

Sabiendo que tanto en el **numerador** como en el **denominador** todos los factores se están multiplicando, podemos hacer directamente la simplificación.

$$\frac{15}{8} \times \frac{10}{9} \times \frac{16}{3} = \frac{5}{1} \times \frac{5}{9} \times \frac{2}{1} = \frac{50}{9} = \frac{45}{9} + \frac{5}{9} = 5 + \frac{5}{9} = 5 \frac{5}{9}$$

Multiplicar las fracciones: $\frac{21}{18} \times 3 \times \frac{45}{6} \times \frac{48}{28}$

Vamos a resolver la multiplicación, escribiendo todos los términos del **numera-**
dor y del **denominador**.

$$\frac{21}{18} \times 3 \times \frac{45}{6} \times \frac{48}{28} = \frac{21 \times 3 \times 45 \times 48}{18 \times 6 \times 28}$$

$$\frac{21}{18} \times 3 \times \frac{45}{6} \times \frac{48}{28} = 45$$

División de Fracciones

Quinto Nivel de Abstracción

Notación de división de fracciones

La división de fracciones podemos indicarla de dos maneras diferentes:

Utilizando notación de fracción.

Numerador. $\rightarrow \frac{6}{5}$
 Raya de quebrado principal. $\rightarrow \frac{2}{3}$
 Denominador. $\rightarrow \frac{2}{3}$

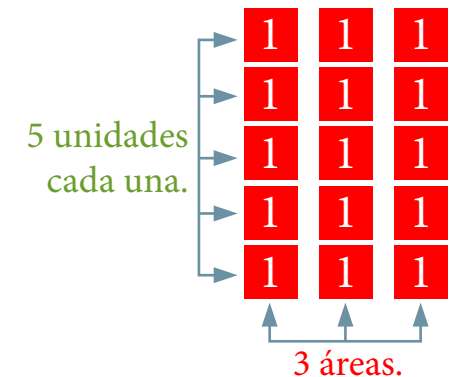
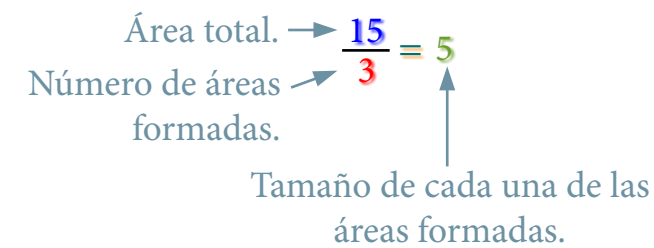
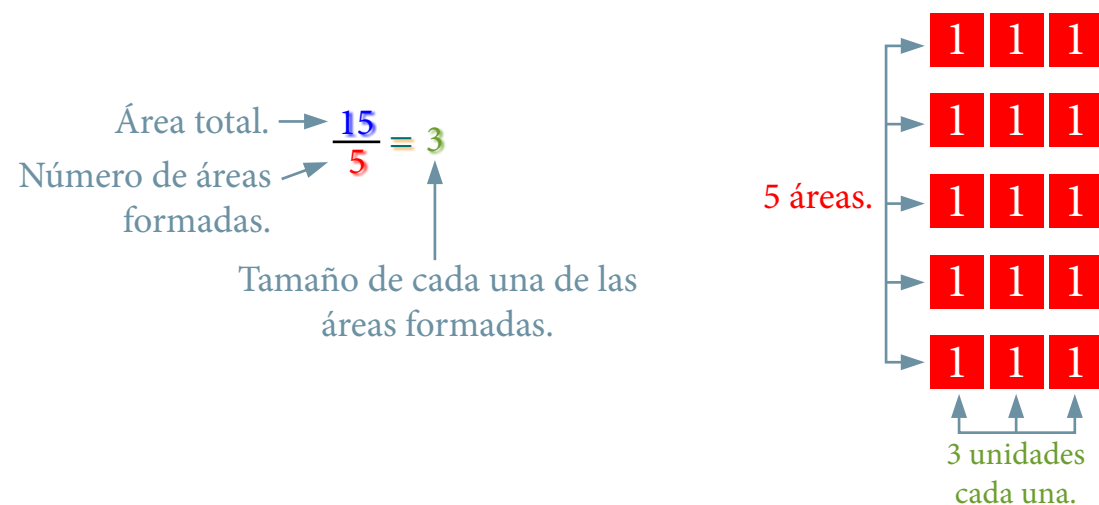
Utilizando notación de fracción.

$\frac{6}{5} \div \frac{2}{3}$
 Símbolo de división.

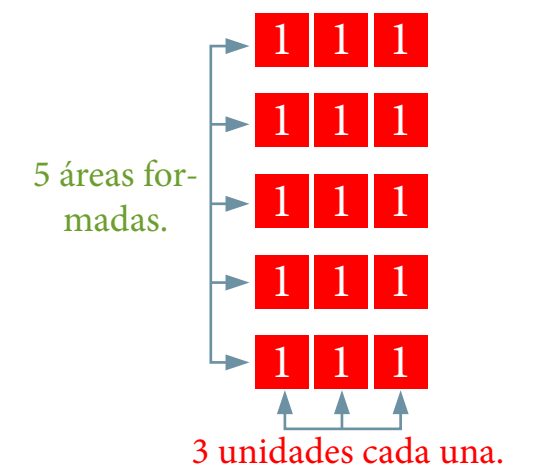
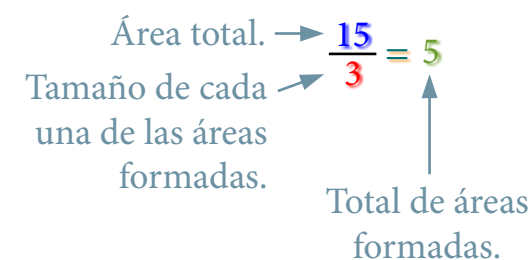
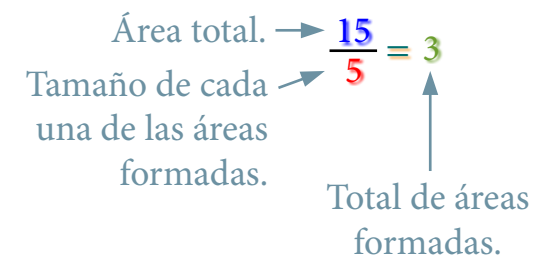
Concepto de la división de números naturales

Multiplicar significa sumar o agrupar las **unidades** de área (**cuadritos**) que hay dentro de un cuadrado o un rectángulo.

Dividir significa separar en áreas iguales de menor tamaño, el área de un cuadrado o un rectángulo.



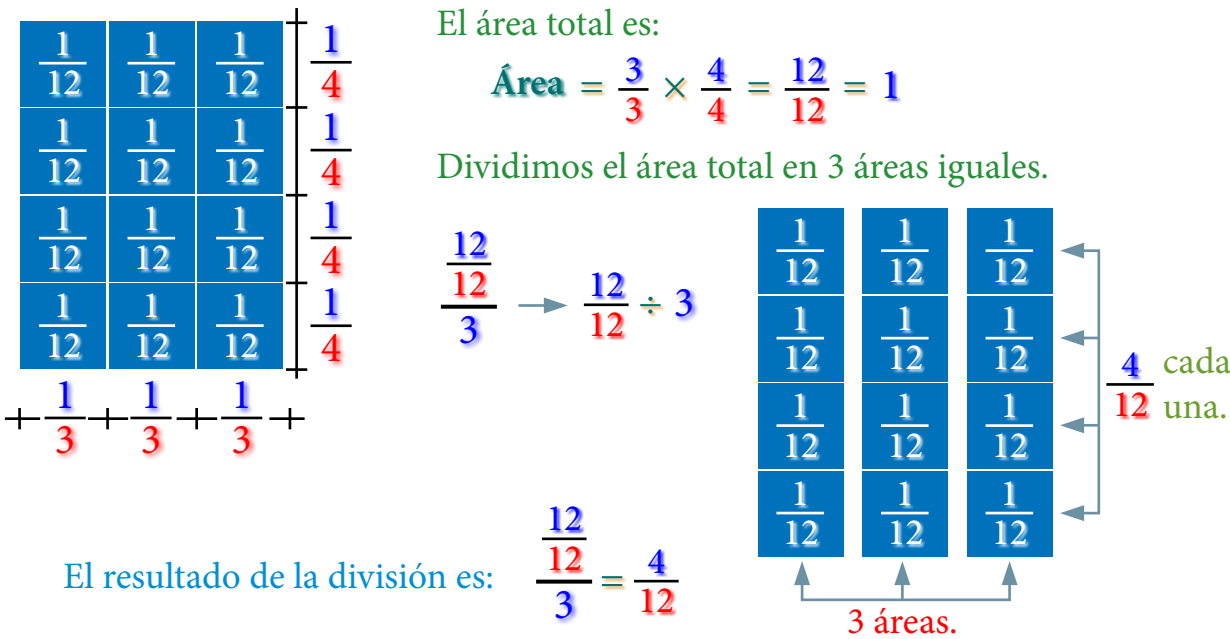
También podemos interpretar la división geométrica de fracciones de la siguiente forma.



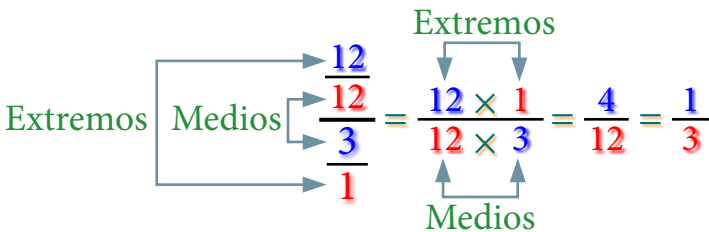
Concepto de la división de números fraccionarios

En la división de números naturales, el área del cuadrado o del rectángulo está formada de unidades, es decir, cada uno de los cuadritos es una unidad.

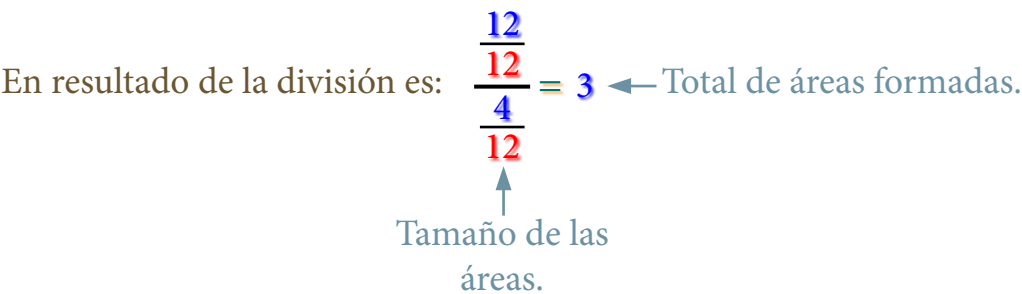
En el caso de la división de fracciones, el área del cuadrado o del rectángulo está formada de fracciones de área. El área total del cuadrado o del rectángulo es uno.



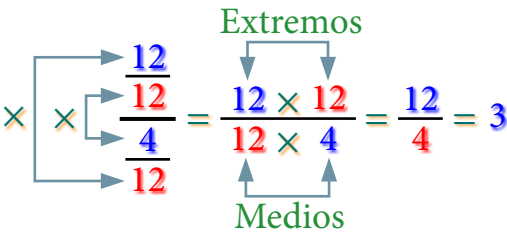
Analizando la división y el resultado, nos damos cuenta que:



Otra forma de realizar geoméricamente la división, es dividir el área total en áreas de tamaño $\frac{4}{12}$.



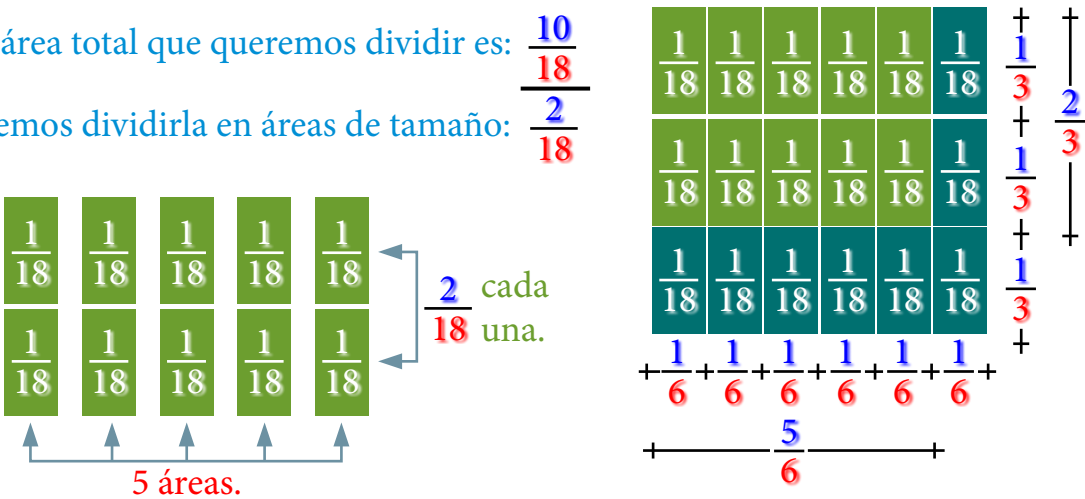
Analizando la división y el resultado, nos damos cuenta que:



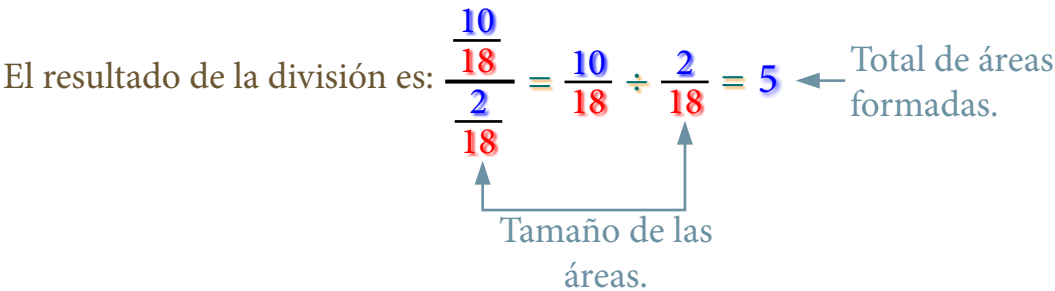
Dividir las fracciones: $\frac{10}{18} \div \frac{2}{18}$

El área total que queremos dividir es: $\frac{10}{18}$

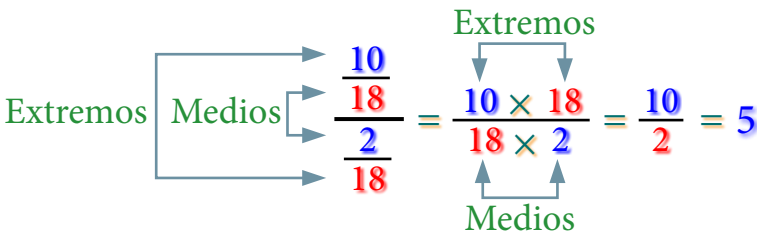
Queremos dividirla en áreas de tamaño: $\frac{2}{18}$



La división de fracciones la podemos expresar de dos formas: $\frac{10}{18} \div \frac{2}{18} = \frac{10}{18} \div \frac{2}{18}$

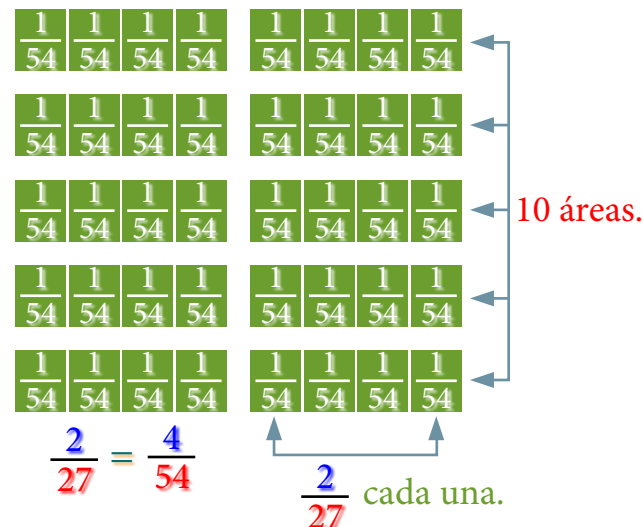


Analizando la división y el resultado, nos damos cuenta que:



Dividir las fracciones: $\frac{40}{54} \div \frac{4}{54}$

El área total que queremos
dividir es: $\frac{40}{54}$
Queremos dividirla en áreas
de tamaño: $\frac{2}{27}$



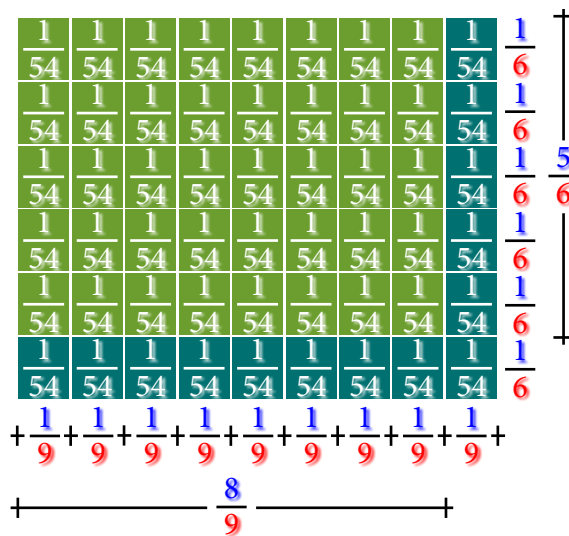
El resultado de la división es: $\frac{40}{54} \div \frac{2}{27} = 10$ ← Total de áreas formadas.

Tamaño de las áreas.

Analizando la división y el resultado, nos damos cuenta que:

$$\frac{40}{54} \div \frac{2}{27} = \frac{40 \times 27}{54 \times 2} = \frac{20}{2} = 10$$

Extremos Medios



Algoritmos de la división utilizando notación de fracción

Resulta muy sencillo crear el algoritmo, aplicando el concepto de división de fracciones en forma geométrica.

El algoritmo consiste en cuatro pasos.

1. Escribir en el **numerador** la multiplicación de los extremos de las fracciones: el **numerador** de la fracción que se encuentra en el **numerador** y el **denominador** de la fracción que se encuentra en el **denominador**.
2. Escribir en el denominador la multiplicación de los medios: el **denominador** de la fracción que se encuentra en el **numerador** y el **numerador** de la fracción que se encuentra en el **denominador**.
3. Simplificar los términos y efectuar la multiplicación.
4. Si es posible, se expresa el resultado en notación mixta y se simplifica.

Utilizando el algoritmo dividir las fracciones: $\frac{45}{63} \div \frac{9}{27}$

Primer paso.

Escribir en el **numerador** la multiplicación de los extremos de las fracciones: el **numerador** de la fracción que se encuentra en el **numerador** y el **denominador** de la fracción que se encuentra en el **denominador**.

$$\frac{45}{63} \div \frac{9}{27} = \frac{45 \times 27}{63 \times 9}$$

Extremos Medios

Segundo paso.

Escribir en el denominador la multiplicación de los medios: el **denominador** de la fracción que se encuentra en el **numerador** y el **numerador** de la fracción que se encuentra en el **denominador**.

$$\frac{45}{63} \div \frac{9}{27} = \frac{45 \times 27}{63 \times 9}$$

Extremos Medios

Algoritmos de la división de números fraccionarios

La división de fracciones puede expresarse de dos formas diferentes: utilizando notación de fracción y usando el signo de división.

Utilizando el resultado que hemos obtenido al aplicar el concepto de división de fracciones, vamos a desarrollar dos algoritmos, uno para cada una de las formas de expresar la división de fracciones.

Tercer paso.

Simplificar los términos y efectuar la multiplicación.

$$\frac{\frac{45}{63}}{\frac{9}{27}} = \frac{\frac{5}{7} \times \frac{27}{9}}{\frac{63}{7} \times \frac{9}{1}} = \frac{15}{7}$$

Cuarto paso.

1. Si es posible, se expresa el resultado en notación mixta y se simplifica.

$$\frac{15}{7} = \frac{14 + 1}{7} = \frac{14}{7} + \frac{1}{7} = 2 \frac{1}{7}$$

Utilizando el algoritmo dividir las fracciones: $\frac{\frac{49}{35}}{\frac{72}{64}}$

Primer paso.

Escribir en el **numerador** la multiplicación de los extremos de las fracciones: el **numerador** de la fracción que se encuentra en el **numerador** y el **denominador** de la fracción que se encuentra en el **denominador**.

$$\frac{\frac{49}{35}}{\frac{72}{64}} = \frac{49 \times 64}{35 \times 72}$$

Segundo paso.

Escribir en el **denominador** la multiplicación de los medios: el **denominador** de la fracción que se encuentra en el **numerador** y el **numerador** de la fracción que se encuentra en el **denominador**.

$$\frac{\frac{49}{35}}{\frac{72}{64}} = \frac{49 \times 64}{35 \times 72}$$

Tercer paso.

Simplificar los términos y efectuar la multiplicación.

$$\frac{\frac{49}{35}}{\frac{72}{64}} = \frac{\frac{7}{5} \times \frac{64}{9}}{\frac{35}{5} \times \frac{72}{9}} = \frac{56}{45}$$

Cuarto paso.

1. Si es posible, se expresa el resultado en notación mixta y se simplifica.

$$\frac{56}{45} = \frac{45 + 11}{45} = \frac{45}{45} + \frac{11}{45} = 1 \frac{11}{45}$$

Algoritmos de la división utilizando notación de división

Para crear el algoritmo analizamos cuidadosamente la división de fracciones utilizando notación de fracción.

$$\frac{3}{7} \div \frac{4}{5} = \frac{3}{7} \times \frac{5}{4} = \frac{15}{28}$$

Multiplicar por los extremos y dividir entre los medios, es equivalente a *cambiar el signo de división por el de multiplicación*, y darle la vuelta a la segunda fracción.

A esta forma de efectuar la división de fracciones, en México, le llamamos la *ley de la tortilla*.

Ley de la tortilla

Para calentar una tortilla la ponemos en un comal, la calentamos de un lado y luego le *damos la vuelta* para calentarla del otro. Como hemos demostrado en el ejemplo anterior, para dividir dos fracciones, *cambiamos el signo de la división por el de multiplicación y le damos la vuelta a la segunda fracción*.

Para que sea fácil recordar la división de fracciones, a esta forma de hacerla, le llamamos la *ley de la tortilla*, ya que tanto al calentar una tortilla como al hacer una división de fracciones, *le damos la vuelta*.

El algoritmo consiste en tres pasos.

1. Cambiar el signo de *división* por el de *multiplicación*. Darle la *vuelta* a la *segunda fracción*.
2. Simplificar los términos y efectuar la multiplicación.
3. Si es posible, se expresa el resultado en notación mixta y se simplifica.

Vamos a demostrar que al efectuar una división de fracciones, el multiplicar los extremos y el resultado dividirlo entre la multiplicación de los medios, es equivalente a cambiar el signo de división por el de multiplicación y darle la vuelta a la segunda fracción.

Notación de fracción.

$$\frac{27}{20} \div \frac{3}{4} = \frac{27}{20} \times \frac{4}{3} = \frac{9}{5} = \frac{5+4}{5} = \frac{5}{5} + \frac{4}{5} = 1 \frac{4}{5}$$

Notación con el signo de división.

Cambiamos el signo
de ÷ por el de ×.

$$\frac{27}{20} \div \frac{3}{4} = \frac{27}{20} \times \frac{4}{3} = \frac{9}{5} = \frac{5+4}{5} = \frac{5}{5} + \frac{4}{5} = 1 \frac{4}{5}$$

Le damos la vuelta
a la fracción.

Efectuar la división de fracciones: $\frac{81}{35} \div \frac{18}{15}$

Cambiamos el signo
de ÷ por el de ×.

$$\frac{81}{35} \div \frac{18}{15} = \frac{81}{35} \times \frac{15}{18} = \frac{9}{7} \times \frac{3}{2} = \frac{27}{14} = \frac{14+13}{14} = \frac{14}{14} + \frac{13}{14} = 1 \frac{13}{14}$$

Le damos la vuelta
a la fracción.

Efectuar la división de fracciones: $\frac{72}{21} \div \frac{32}{49}$

Cambiamos el signo
de ÷ por el de ×.

$$\frac{72}{21} \div \frac{32}{49} = \frac{72}{21} \times \frac{49}{32} = \frac{9}{3} \times \frac{7}{4} = \frac{63}{12} = \frac{60+3}{12} = \frac{60}{12} + \frac{3}{12} = 5 \frac{1}{4}$$

Le damos la vuelta
a la fracción.

Comprobación de la Multiplicación y la División de Fracciones

Quinto Nivel de Abstracción

La multiplicación y la división son operaciones inversas

Multiplicar significa agrupar el área de un cuadrado o rectángulo. Dividir es separar el área que hemos agrupado al multiplicar.

$$\begin{array}{lcl}
 5 \times 9 = 45 & \longrightarrow & \frac{45}{9} = 5 \quad \longrightarrow \quad \frac{45}{5} = 9 \\
 \\
 \frac{3}{7} \times \frac{4}{5} = \frac{12}{35} & \longrightarrow & \frac{\frac{12}{35}}{\frac{3}{7}} = \frac{12 \times 7}{35 \times 3} = \frac{84}{105} = \frac{4}{5} \\
 & \longrightarrow & \frac{\frac{12}{35}}{\frac{4}{5}} = \frac{12 \times 5}{35 \times 4} = \frac{60}{140} = \frac{3}{7}
 \end{array}$$

Comprobación de la multiplicación de fracciones

Si el resultado de la multiplicación, lo dividimos entre uno de los multiplicandos, obtenemos el otro multiplicando. De esta manera, podemos verificar que la multiplicación de fracciones es correcta.

$$\begin{array}{lcl}
 \frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{14}{15} & \longrightarrow & \frac{14}{15} \div \frac{7}{5} = \frac{14}{15} \times \frac{5}{7} = \frac{70}{105} = \frac{2}{3} \\
 \frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{14}{15} & \longrightarrow & \frac{14}{15} \div \frac{2}{3} = \frac{14}{15} \times \frac{3}{2} = \frac{42}{30} = \frac{7}{5}
 \end{array}$$

Comprobación de la división de fracciones

Si multiplicamos el divisor por el resultado de la división, obtenemos el dividendo.

$$\begin{array}{lcl}
 7 \overline{) 42} = 6 & \longrightarrow & \frac{42}{7} = 6 \quad \longrightarrow \quad 6 \times 7 = 42 \\
 \\
 \frac{5}{12} \div \frac{2}{3} = \frac{5}{8} & \longrightarrow & \frac{5}{3} \times \frac{5}{8} = \frac{25}{24} = \frac{5}{12} \\
 \\
 \frac{5}{12} \div \frac{5}{8} = \frac{2}{3} & \longrightarrow & \frac{5}{8} \times \frac{2}{3} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}
 \end{array}$$