Capítulo 9

Números Romanos
Proporciones
Regla de Tres
Razones

Sistema Romano de Numeración

Cuarto Nivel de Abstracción

Números romanos

Los números romanos fueron creados hace más de 20 siglos y sirvieron como base para crear otros sistemas numéricos, como es el caso del sistema de numeración decimal.

En la actualidad los utilizamos para describir fechas, hacer listados, clasificar volúmenes de enciclopedias, etcétera. Por lo tanto, es de gran valor cultural el que desarrollemos la habilidad para leer y escribir números en notación romana.

El sistema numérico decimal es un sistema posicional que utiliza únicamente 10 símbolos, y la posición del dígito en las columnas numéricas determina su valor. Esta característica nos permite crear algoritmos para resolver las operaciones básicas.

En el sistema de numeración romano, cada número se representa con un símbolo diferente, por lo cual, no es útil para realizar operaciones aritméticas. Sin embargo, su valor histórico es muy importante.

Símbolos utilizados en los números romanos

La notación romana cuenta con siete símbolos, más seis símbolos derivados de estos, que al combinarlos nos permiten escribir todos los números.

Los símbolos y su equivalencia en el sistema decimal son:

Símbolo Romano		Valor Equivalente
I	→	1
V	→	5
X	→	10
L	→	50
C	→	100
D	→	500
M	→	1,000

Multiplicar por mil

Colocar una raya encima de los símbolos romanos, excepto en el I, significa multiplicar por 1,000, es decir, aumentar 3 ceros.

Usando estos trece símbolos: los siete símbolos y los seis símbolos con una raya encima, creamos todo el universo numérico.

Multiplicar por mil

Colocar una raya encima de los símbolos romanos, excepto en el I, significa multiplicar por 1,000, es decir, aumentar 3 ceros.

Símbolo Romano		Valor Equivalente	Símbolo Romano		Valor Equivalente
I	→	1			
V	→	5	C	→	100
$\overline{V}$	→	5,000	$\overline{C}$	→	100,000
X	→	10	D	→	500
$\overline{X}$	→	10,000	$\overline{D}$	→	500,000
L	→	50	M	→	1,000
$\overline{L}$	→	50,000	$\overline{M}$	→	1,000,000

Procedimiento para escribir números romanos

El sistema de numeración romano no cuenta con el cero, ya que no es un sistema posicional, por lo cual, para escribir números tenemos que sumar o restar los símbolos.

Para escribir números en notación romana, es importante tomar en cuenta las siguientes reglas:

1. Repetir los símbolos I (1), X (10), C (100), M(1,000) es equivalente a sumar las cantidades que representan.
2. Los símbolos I (1), X (10), C (100), M(1,000) no pueden repetirse más de tres veces.

I	→	1
II	→	1 + 1 = 2
III	→	1 + 1 + 1 = 3

X	→	10
XX	→	10 + 10 = 20
XXX	→	10 + 10 + 10 = 30

C	→	100
CC	→	100 + 100 = 200
CCC	→	100 + 100 + 100 = 300

M	→	1,000
MM	→	1,000 + 1,000 = 2,000
MMM	→	1,000 + 1,000 + 1,000 = 3,000

3. Los símbolos V (5), L (50) y D (500) no se repiten. Solamente pueden escribirse una vez.

V	→	5
L	→	50
D	→	500

4. Los doce símbolos que hemos creado y que aparecen en azul, son las unidades básicas que utilizamos para construir los números.

V	→	5
L	→	50
D	→	500

C	→	100
CC	→	200
CCC	→	300

X	→	10
XX	→	20
XXX	→	30

M	→	1,000
MM	→	2,000
MMM	→	3,000

5. Un símbolo o varios símbolos de menor valor colocado a la derecha de otro de mayor valor (unidad básica) se suman.

V I	→	5 + 1 = 6
V I I	→	5 + 2 = 7
V I I I	→	5 + 3 = 8

X I	→	10 + 1 = 11
X I I	→	10 + 2 = 12
X I I I	→	10 + 3 = 13

X V	→	10 + 5 = 11
X V I	→	10 + 6 = 16
X X V I I	→	20 + 7 = 27
X X X V I I I	→	30 + 8 = 38

L X V	→	50 + 10 + 5 = 15
L X V I I	→	50 + 10 + 5 + 2 = 67
L X X X V I I I	→	50 + 30 + 5 + 3 = 88

C X V I I	→	100 + 10 + 5 + 2 = 117
C C L X X V I I I	→	200 + 50 + 20 + 5 + 3 = 278
C C C L X X X V I I I	→	300 + 50 + 30 + 5 + 3 = 388

D L X X X V I I	→	500 + 50 + 30 + 5 + 2 = 587
D C C L X X V I I I	→	500 + 200 + 50 + 20 + 5 + 3 = 778
D C C C L X X X V I I I	→	500 + 300 + 50 + 30 + 5 + 3 = 888

M D C L X X V I I → 1,000 + 500 + 100 + 50 + 20 + 5 + 2 = 1,677
M M D C C L X V I I I → 2,000 + 500 + 200 + 50 + 20 + 5 + 3 = 2,768
M M M D C C C L X X X V I I I → 3,000 + 500 + 300 + 50 + 30 + 5 + 3 = 3,888

6. Un símbolo (solamente uno) de menor valor colocado a la izquierda de uno de mayor valor (unidad básica) se resta.

I V → 5 − 1 = 4
I X → 10 − 1 = 9
X L → 50 − 10 = 40

X C → 100 − 10 = 90
C D → 500 − 100 = 400
C M → 1,000 − 100 = 900

I V	→	4
I X	→	9
X L	→	40

X C	→	90
C D	→	400
C M	→	900

X I V → 10 + 5 − 1 = 14
X I X → 10 + 10 − 1 = 19
X X I V → 20 + 5 − 1 = 24
X X I X → 20 + 10 − 1 = 29
X X X I X → 30 + 10 − 1 = 39
X L I X → 50 − 10 + 10 − 1 = 49
C X C → 100 + 100 − 10 = 190
C C X C → 200 + 100 − 10 = 290
C D X C → 500 − 100 + 100 − 10 = 490
D C D X C → 500 + 500 − 100 + 100 − 10 = 990
M C M → 1,000 + 1,000 − 100 = 1,900
M M C M X L → 2,000 + 1,000 − 100 + 50 − 10 = 2,940

Para entender y demostrar la dinámica del sistema de numeración romana, escribimos los primeros 150 números.

1	I	11	XI	21	XXI	31	XXXI
2	II	12	XII	22	XXII	32	XXXII
3	III	13	XIII	23	XXIII	33	XXXIII
4	IV	14	XIV	24	XXIV	34	XXXIV
5	V	15	XV	25	XXV	35	XXXV
6	VI	16	XVI	26	XXVI	36	XXXVI
7	VII	17	XVII	27	XXVII	37	XXXVII
8	VIII	18	XVIII	28	XXVIII	38	XXXVIII
9	IX	19	XIX	29	XXIX	39	XXXIX
10	X	20	XX	30	XXX	40	XL

41	XLI	51	LI	61	LXI	71	LXXI
42	XLII	52	LII	62	LXII	72	LXXII
43	XLIII	53	LIII	63	LXIII	73	LXXIII
44	XLIV	54	LIV	64	LXIV	74	LXXIV
45	XLV	55	LV	65	LXV	75	LXXV
46	XLVI	56	LVI	66	LXVI	76	LXXVI
47	XLVII	57	LVII	67	LXVII	77	LXXVII
48	XLVIII	58	LVIII	68	LXVIII	78	LXXVIII
49	XLIX	59	LIX	69	LXIX	79	LXXIX
50	L	60	LX	70	LXX	80	LXXX

81	LXXXI	91	XCI	101	CI	111	CXI
82	LXXXII	92	XCII	102	CII	112	CXII
83	LXXXIII	93	XCIII	103	CIII	113	CXIII
84	LXXXIV	94	XCIV	104	CIV	114	CXIV
85	LXXXV	95	XCV	105	CV	115	CXV
86	LXXXVI	96	XCVI	106	CVI	116	CXVI
87	LXXXVII	97	XCVII	107	CVII	117	CXVII
88	LXXXVIII	98	XCVIII	108	CVIII	118	CXVIII
89	LXXXIX	99	XCIX	109	CIX	119	CXIX
90	XC	100	C	110	CX	120	CXX

121	CXXI	131	CXXXI	141	CXLI
122	CXXII	132	CXXXII	142	CXLII
123	CXXIII	133	CXXXIII	143	CXLIII
124	CXXIV	134	CXXXIV	144	CXLIV
125	CXXV	135	CXXXV	145	CXLV
126	CXXVI	136	CXXXVI	146	CXLVI
127	CXXVII	137	CXXXVII	147	CXLVII
128	CXXVIII	138	CXXXVIII	148	CXLVIII
129	CXXIX	139	CXXXIX	149	CXLIX
130	CXXX	140	CXL	150	CL

Siguiendo este procedimiento podemos escribir cualquier número en notación romana.

El número más grande que podemos escribir, sin utilizar la raya encima del símbolo, es 3,999.

M M M C M X C I X → **3,999**

Escribir una raya encima del símbolo, significa multiplicar el valor del símbolo por 1,000.

$\mathbf{M\overline{V}}$ → **4,000** $\mathbf{M\overline{X}}$ → **9,000**

Utilizando la raya encima del símbolo, podemos escribir cualquier número sin importar su valor.

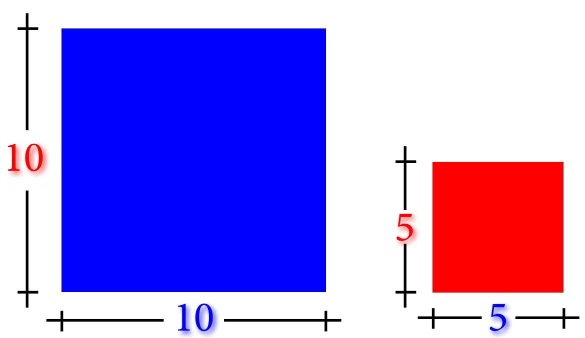
4,794	$M\overline{V}DCCXCIV$
8,278	$\overline{V}MMMCCLXXVIII$
9,367	$M\overline{X}CCCLXVII$
12,649	$\overline{X}MMDCXLIX$
73,985	$\overline{LXX}MMMCMLXXXV$

Proporciones

Quinto Nivel de Abstracción

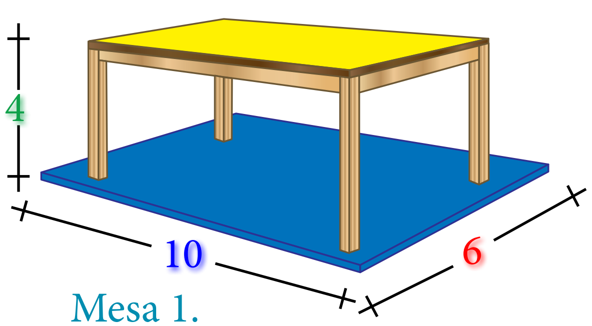
Concepto de proporcionalidad

Cuando dos objetos o dos figuras geométricas son iguales pero de diferente tamaño, les llamamos proporcionales.

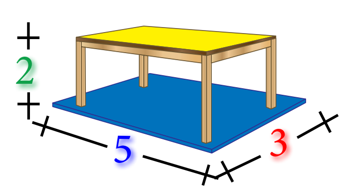


Los dos cuadrados son iguales, exactamente iguales, pero el cuadrado rojo es exactamente la mitad del cuadrado azul.

Los cuadrados son proporcionales.



Mesa 1.



Mesa 2.

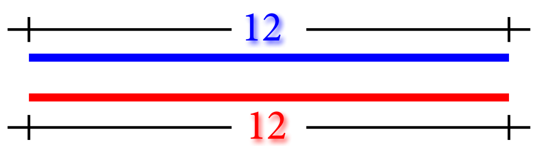
Las dos mesas son iguales, exactamente iguales, pero la mesa 1 es dos veces más grande que la mesa 2.

Las mesas son proporcionales.

Para entender y demostrar qué significa la proporcionalidad, primero vamos a utilizar una recta.

Rectas iguales

Dos rectas son iguales, cuando las dos tienen la misma longitud.

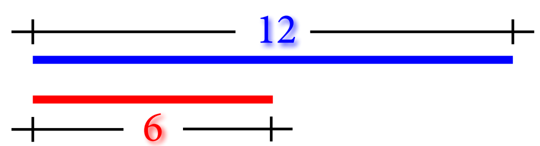


Rectas iguales.

Rectas proporcionales

Dos rectas son proporcionales, cuando tienen diferente longitud.

La recta roja es la *mitad* de la recta azul, o la recta azul es el *doble* de la recta roja.



Rectas proporcionales.

Constante de proporcionales

La constante de proporcionalidad es un número, que puede ser entero o fraccionario, que indica la relación que guardan las recta. La constante de proporcionalidad la indicamos con la letra k.

Para establecer la constante de proporcionalidad, primero debemos elegir una de las rectas como referencia, ya que podemos decir que la recta roja es la *mitad* de la recta azul, o la recta azul es el *doble* de la recta roja.

Tomar la longitud l_1 de la recta azul como referencia, significa indicar qué proporción de la recta azul es la recta roja. En este caso, la recta roja es la *mitad* de la recta azul.

$l_1 = 12$

$l_2 = 6$

Para calcular la constante de proporcionalidad, utilizamos una fracción. En el denominador escribimos la longitud de la recta que usamos como referencia.

$$k_1 = \frac{6}{12} \quad \longrightarrow \quad k_1 = \frac{1}{2}$$

Constante de proporcionalidad.

Conociendo la longitud l_1 de la recta azul (recta de referencia) y el valor de la constante de proporcionalidad k_1, podemos conocer la longitud l_2 de la recta roja.

$$l_2 = l_1 \times k_1 = 12 \times \frac{1}{2} = \frac{12 \times 1}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

Si tomamos la longitud l_2 de la recta roja como referencia, entonces indicamos qué proporción de la recta roja es la recta azul. En este caso, la recta azul es el *doble* de la recta roja.

Para calcular la constante de proporcionalidad, utilizamos una fracción. En el denominador escribimos la longitud de la recta que usamos como referencia.

$$k_2 = \frac{12}{6} \quad \longrightarrow \quad k_2 = 2$$

Constante de proporcionalidad.

Conociendo la longitud l_2 de la recta roja (recta de referencia) y el valor de la constante de proporcionalidad k_2, podemos conocer la longitud l_1 de la recta azul.

$$l_1 = l_2 \times k_2 = 6 \times 2 = 12$$

Ejemplo

Calcular la constante de proporcionalidad k_1, tomando como referencia la longitud l_1, de la recta azul y la constante k_2 utilizando como referencia la longitud l_2 de la recta roja.

$l_1 = 18$

$l_2 = 6$

Tomamos primero la longitud l_1 como referencia y calculamos la constante de proporcionalidad k_1 .

$$k_1 = \frac{6}{18} \quad \longrightarrow \quad k_1 = \frac{1}{3}$$

Tomamos primero la longitud l_2 como referencia y calculamos la constante de proporcionalidad k_2.

$$k_2 = \frac{18}{6} \quad \longrightarrow \quad k_2 = 3$$

Conociendo la longitud l_1 de la recta azul (recta de referencia) y el valor de la constante de proporcionalidad k_1, podemos conocer la longitud l_2 de la recta roja.

$$l_2 = l_1 \times k_1 = 18 \times \frac{1}{3} = \frac{18 \times 1}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

Conociendo la longitud l_2 de la recta roja (recta de referencia) y el valor de la constante de proporcionalidad k_2, podemos conocer la longitud l_1 de la recta azul.

$$l_1 = l_2 \times k_2 = 6 \times 3 = 18$$

Dos pares de rectas proporcionales

Cuando dos pares de rectas proporcionales tienen la misma constante de proporcionalidad, entonces podemos establecer una relación de proporcionalidad entre los dos pares de rectas.

Par de rectas 1.

$l_1 = 18$

$l_2 = 12$

Tomamos primero la longitud l_1 como referencia y calculamos la constante de proporcionalidad k_1 .

$$k_1 = \frac{12}{18} \quad \longrightarrow \quad k_1 = \frac{2}{3}$$

Tomamos primero la longitud l_2 como referencia y calculamos la constante de proporcionalidad k_2 .

$$k_2 = \frac{18}{12} \quad \longrightarrow \quad k_2 = \frac{3}{2}$$

Par de rectas 2.

$l_1 = 9$

$l_2 = 6$

Tomamos primero la longitud l_1 como referencia y calculamos la constante de proporcionalidad k_1 .

$$k_1 = \frac{6}{9} \quad \longrightarrow \quad k_1 = \frac{2}{3}$$

Tomamos primero la longitud l_2 como referencia y calculamos la constante de proporcionalidad k_2 .

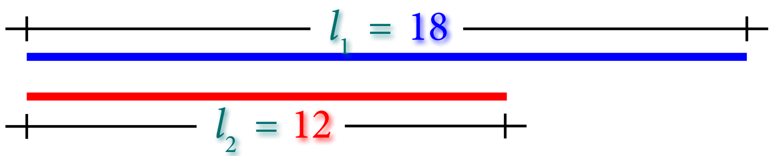
$$k_2 = \frac{9}{6} \quad \longrightarrow \quad k_2 = \frac{3}{2}$$

Tanto el par de rectas 1 como el par de rectas 2 tienen la misma constante de proporcionalidad.

$$k_1 = \frac{2}{3} \qquad k_2 = \frac{3}{2}$$

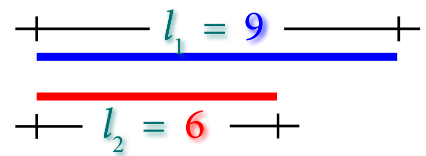
Debido a que los dos pares de rectas tienen la misma constante de proporcionalidad, podemos establecer una relación de proporcionalidad entre los dos pares de rectas.

Par de rectas 1.



$$k_1 = \frac{12}{18}$$

Par de rectas 2.



$$k_2 = \frac{6}{9}$$

$$k_1 = k_2 \longrightarrow k = \frac{12}{18} = \frac{6}{9}$$

Fracciones equivalentes.

Proporcionalidad de los dos pares de rectas

Para indicar que los dos pares de rectas tienen la misma constante de proporcionalidad o que las fracciones son equivalentes, establecemos la relación de proporcionalidad diciendo que 12 es a 18 como 6 es a 9.

como

$$\text{es a} \quad \frac{12}{18} = \frac{6}{9} \quad \text{es a}$$

Para indicar que los dos pares de rectas tienen la misma constante de proporcionalidad o que las fracciones son equivalentes, establecemos la relación de proporcionalidad diciendo que 18 es a 12 como 9 es a 6.

como

$$\text{es a} \quad \frac{18}{12} = \frac{9}{6} \quad \text{es a}$$

Proporcionalidad entre los dos pares de rectas

Debido a que la constante de proporcionalidad entre los dos pares de rectas es la misma, también podemos establecer la proporcionalidad entre las rectas correspondientes de los dos pares de rectas.

Establecemos la proporcionalidad entre la recta l_1 del *par de rectas 1* y la recta l_1 del *par de rectas 2*, y la proporcionalidad entre la recta l_2 del par de rectas 1 y la recta l_2 del par de rectas 2. Tomamos como referencia la recta l_1 del par de rectas 1.

como

$$\text{es a} \quad \frac{9}{18} = \frac{6}{12} \quad \text{es a}$$

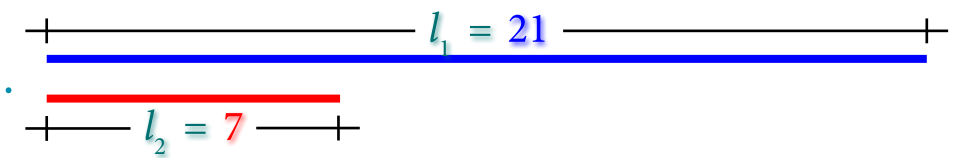
Establecemos la proporcionalidad entre la recta l_1 del *par de rectas 1* y la recta l_1 del *par de rectas 2*, y la proporcionalidad entre la recta l_2 del par de rectas 1 y la recta l_2 del par de rectas 2. Ahora, tomamos como referencia la recta l_2 del par de rectas 2.

como

$$\text{es a} \quad \frac{18}{9} = \frac{12}{6} \quad \text{es a}$$

Ejemplo

Par de rectas 1.



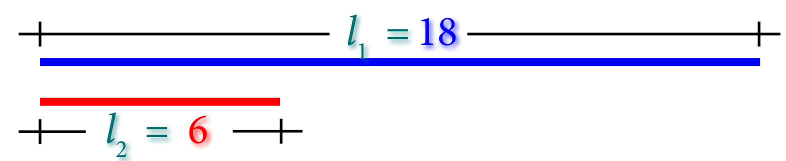
Tomamos primero la longitud l_1 como referencia y calculamos la constante de proporcionalidad k_1 .

$$k_1 = \frac{7}{21} \longrightarrow k_1 = \frac{1}{3}$$

Tomamos primero la longitud l_2 como referencia y calculamos la constante de proporcionalidad k_2 .

$$k_2 = \frac{21}{7} \longrightarrow k_2 = 3$$

Par de rectas 2.



Tomamos primero la longitud l_1 como referencia y calculamos la constante de proporcionalidad k_1 .

$$k_1 = \frac{6}{18} \longrightarrow k_1 = \frac{1}{3}$$

Tomamos primero la longitud l_2 como referencia y calculamos la constante de proporcionalidad k_2 .

$$k_2 = \frac{18}{6} \longrightarrow k_2 = 3$$

Proporcionalidad de los dos pares de rectas

Para indicar que los dos pares de rectas tienen la misma constante de proporcionalidad o que las fracciones son equivalentes, establecemos la relación de proporcionalidad diciendo que 7 es a 21 como 6 es a 18.

como

$$\text{es a} \quad \frac{7}{21} = \frac{6}{18} \quad \text{es a}$$

Para indicar que los dos pares de rectas tienen la misma constante de proporcionalidad o que las fracciones son equivalentes, establecemos la relación de proporcionalidad diciendo que 21 es a 7 como 18 es a 6.

como

$$\text{es a} \quad \frac{21}{7} = \frac{18}{6} \quad \text{es a}$$

Proporcionalidad entre los dos pares de rectas

Debido a que la constante de proporcionalidad entre los dos pares de rectas es la misma, también podemos establecer la proporcionalidad entre las rectas correspondientes de los dos pares de rectas.

Establecemos la proporcionalidad entre la recta l_1 del *par de rectas 1* y la recta l_1 del *par de rectas 2*, y la proporcionalidad entre la recta l_2 del par de rectas 1 y la recta l_2 del par de rectas 2. Tomamos como referencia la recta l_1 del par de rectas 1.

$$\text{es a}\quad \frac{18}{21} \overset{\text{como}}{=} \frac{6}{7} \quad\text{es a}$$

Establecemos la proporcionalidad entre la recta l_1 del *par de rectas 1* y la recta l_1 del *par de rectas 2*, y la proporcionalidad entre la recta l_2 del par de rectas 1 y la recta l_2 del par de rectas 2. Ahora, tomamos como referencia la recta l_2.

$$\text{es a}\quad \frac{21}{18} \overset{\text{como}}{=} \frac{7}{6} \quad\text{es a}$$

Cuando establecemos una relación de proporcionalidad porque tenemos dos pares de rectas con la misma constante de proporcionalidad, podemos calcular la longitud desconocida de alguna de las rectas.

Para hacerlo utilizamos la propiedad de la división como operación inversa de la multiplicación.

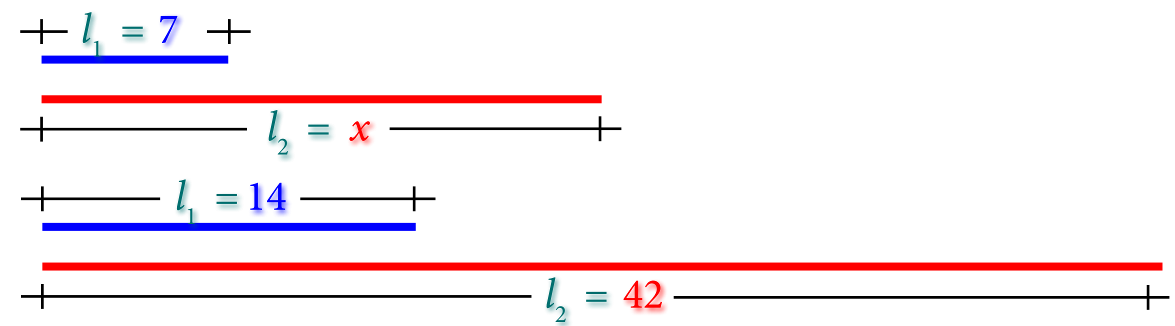
$$\frac{28}{4} = 7 \longrightarrow 28 = 7 \times 4$$

$$\frac{24}{6} = \frac{12}{3} \longrightarrow 24 = \frac{12}{3} \times 6 \longrightarrow 24 = 4 \times 6 \longrightarrow 24 = 24$$

$$\frac{x}{7} = \frac{42}{14} \longrightarrow x = \frac{42}{14} \times 7 \longrightarrow x = \frac{42 \times 7}{14} \longrightarrow x = \frac{42}{2} \longrightarrow x = 21$$

Ejemplo

El valor de la constante de proporcionalidad de los dos pares de rectas es el mismo, determinar la longitud desconocida x de la recta roja.



Calculamos la constante de proporcionalidad de los dos pares de rectas, utilizando en ambos pares de rectas como recta de referencia, la recta cuya longitud conocemos.

Par de rectas 1.

$$k_1 = \frac{x}{7}$$

Par de rectas 2.

$$k_2 = \frac{42}{14}$$

La constante de proporcionalidad de ambos pares de rectas es la misma.

$$k_1 = k_2 = \frac{x}{7} = \frac{42}{14}$$

Proporcionalidad de los dos pares de rectas

Usamos la constante de proporcionalidad, para obtener el valor de la recta desconocida. Aplicamos la propiedad de la división como operación inversa de la multiplicación para conocer el valor de la longitud desconocida x.

$$\frac{x}{7} = \frac{42}{14} \longrightarrow x = \frac{42}{14} \times 7 \longrightarrow x = \frac{42 \times 7}{14} \longrightarrow x = \frac{42}{2} \longrightarrow x = 21$$

Proporcionalidad entre los dos pares de rectas

Ahora utilizamos la proporcionalidad entre los dos pares de rectas para obtener el valor de la recta desconocida. Aplicamos la propiedad de la división como operación inversa de la multiplicación para conocer el valor de la longitud desconocida x.

$$\frac{x}{42} = \frac{7}{14} \longrightarrow x = \frac{7}{14} \times 42 \longrightarrow x = \frac{7 \times 42}{14} \longrightarrow x = \frac{42}{2} \longrightarrow x = 21$$

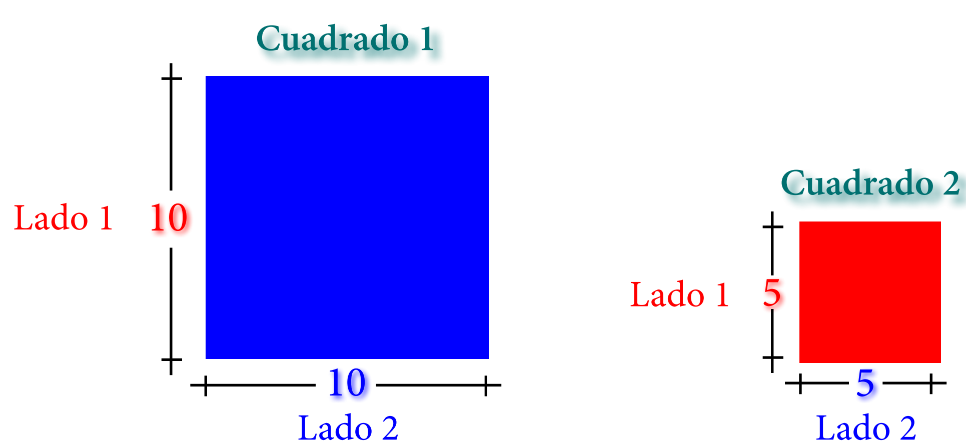
Proporciones

Sexto Nivel de Abstracción

Figuras geométricas proporcionales o semejantes

Dos figuras geométricas son proporcionales o semejantes cuando todos sus lados correspondientes guardan la misma proporcionalidad, es decir, cuando su constante de proporcionalidad k es la misma.

Cuadrados



Para que los dos cuadrados sean proporcionales, se requiere que la constante de proporcionalidad entre sus lados sea la misma.

Cuadrado 1. **Cuadrado 2.**

$$k_1 = \frac{\text{Lado 1}}{\text{Lado 2}} = \frac{10}{10} = 1 \qquad k_2 = \frac{\text{Lado 1}}{\text{Lado 2}} = \frac{5}{5} = 1 \quad \rightarrow \quad k_1 = k_2 = 1$$

La constante de proporcionalidad es la misma, por lo tanto, ambos cuadrados son proporcionales.

Todos los cuadrados son proporcionales

Todos los cuadrados son proporcionales, ya que la constante de proporcionalidad entre los lados de todos los cuadrados es 1.

Constante de proporcionalidad entre dos cuadrados

Para conocer la constante de proporcionalidad entre dos cuadrados, seguimos el mismo procedimiento que usamos entre dos rectas.

Escogemos el cuadrado 2 como referencia.

Constante de proporcionalidad del lado 1.

Lado 1. **Lado 2.**

$$k_1 = \frac{\text{Cuadrado } 1_{\text{Lado 1}}}{\text{Cuadrado } 2_{\text{Lado 1}}} = \frac{10}{5} = 2 \qquad k_2 = \frac{\text{Cuadrado } 1_{\text{Lado 2}}}{\text{Cuadrado } 2_{\text{Lado 2}}} = \frac{10}{5} = 2$$

$$k_1 = k_2 = 1$$

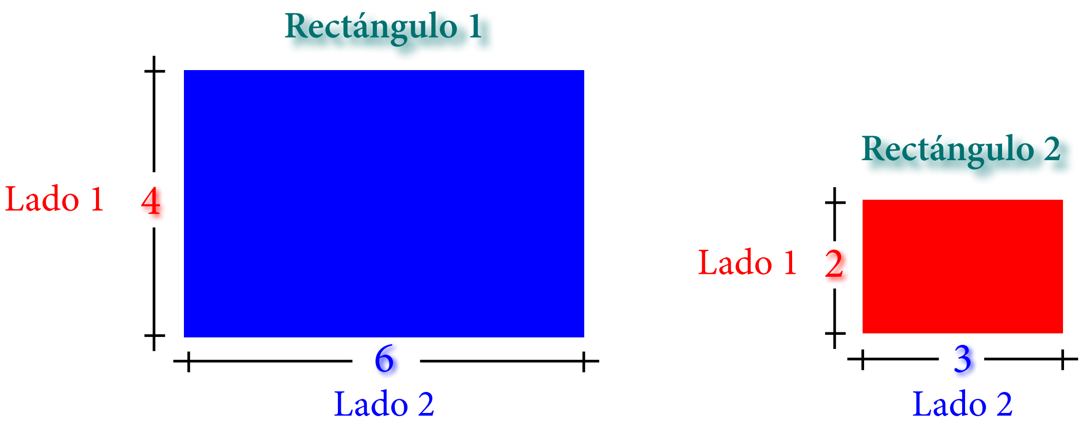
Ahora escogemos el cuadrado 1 como referencia.

Lado 1. **Lado 2.**

$$k_1 = \frac{\text{Cuadrado } 2_{\text{Lado 1}}}{\text{Cuadrado } 1_{\text{Lado 1}}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \qquad k_2 = \frac{\text{Cuadrado } 2_{\text{Lado 2}}}{\text{Cuadrado } 1_{\text{Lado 2}}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$k_1 = k_2 = \frac{1}{2}$$

Rectángulos



Para que los dos rectángulos sean proporcionales, se requiere que la constante de proporcionalidad entre sus lados sea la misma.

Rectángulo 1. $k_1 = \frac{\text{Lado 1}}{\text{Lado 2}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Rectángulo 2. $k_2 = \frac{\text{Lado 1}}{\text{Lado 2}} = \frac{2}{3}$

$$\rightarrow \quad k_1 = k_2 = \frac{2}{3}$$

La constante de proporcionalidad es la misma, por lo tanto, ambos rectángulos son proporcionales.

Constante de proporcionalidad entre dos rectángulos

Para conocer la constante de proporcionalidad entre dos rectángulos, seguimos el mismo procedimiento que usamos entre dos rectas.

Escogemos el rectángulo 2 como referencia.

Constante de proporcionalidad del lado 1.

Lado 1.

$$k_1 = \frac{\text{Rectángulo } 1_{\text{Lado 1}}}{\text{Rectángulo } 2_{\text{Lado 1}}} = \frac{4}{2} = 2$$

Lado 2.

$$k_2 = \frac{\text{Rectángulo } 1_{\text{Lado 2}}}{\text{Rectángulo } 2_{\text{Lado 2}}} = \frac{6}{3} = 2$$

$$k_1 = k_2 = 2$$

Ahora escogemos el rectángulo 1 como referencia.

Lado 1.

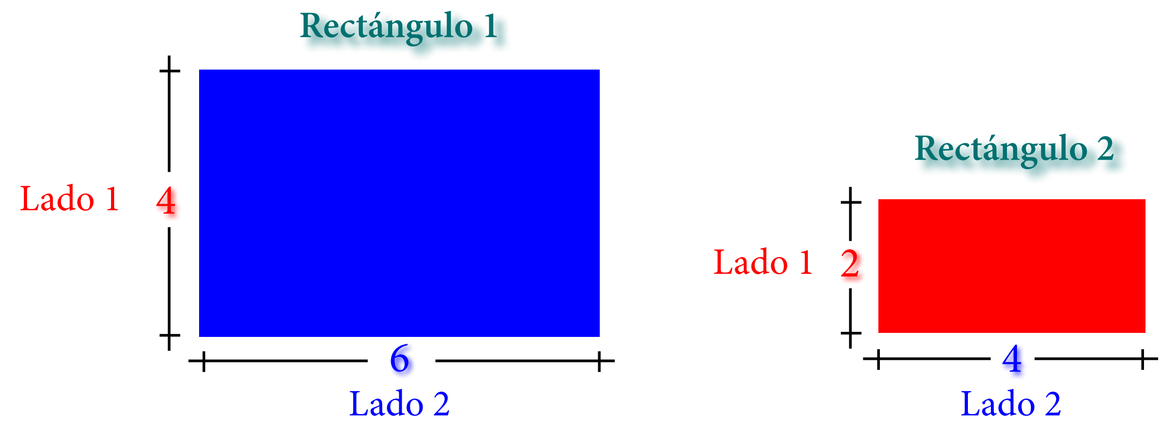
$$k_1 = \frac{\text{Rectángulo } 2_{\text{Lado 1}}}{\text{Rectángulo } 1_{\text{Lado 1}}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Lado 2.

$$k_2 = \frac{\text{Rectángulo } 2_{\text{Lado 2}}}{\text{Rectángulo } 1_{\text{Lado 2}}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$k_1 = k_2 = \frac{1}{2}$$

No todos los rectángulos son proporcionales o semejantes.



Para que los dos rectángulos sean proporcionales, se requiere que la constante de proporcionalidad entre sus lados sea la misma.

Rectángulo 1. $k_1 = \frac{\text{Lado 1}}{\text{Lado 2}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Rectángulo 2. $k_2 = \frac{\text{Lado 1}}{\text{Lado 2}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$$k_1 = \frac{2}{3} \qquad k_2 = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad k_1 \neq k_2$$

La constante de proporcionalidad de los rectángulos es diferente, por lo tanto, no son proporcionales o semejantes.

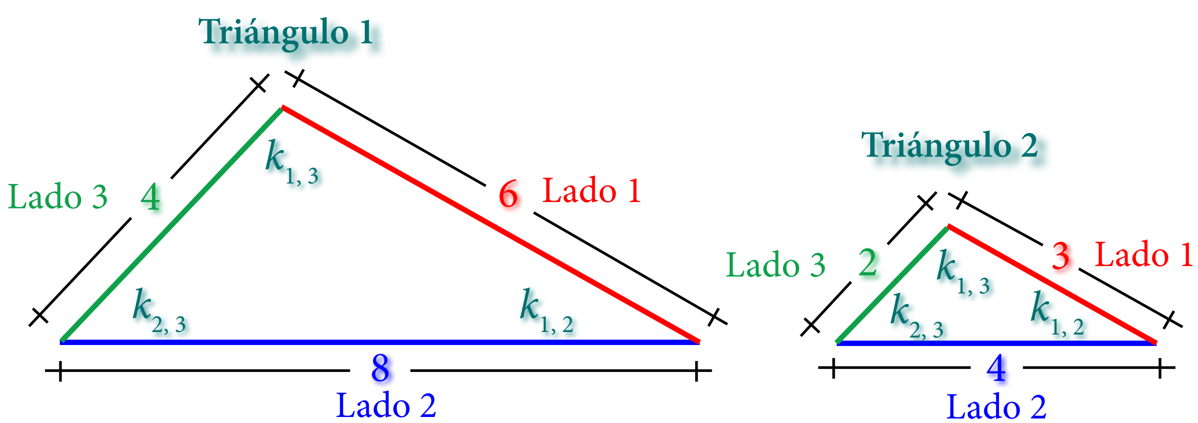
Triángulos

Dos triángulos son semejantes o proporcionales si son iguales en su forma, es decir, son homogéneos aunque diferentes de tamaño.

Por lo cual, dos triángulos son semejantes o proporcionales cuando los tres pares de lados correspondientes tienen la misma constante de proporcionalidad k.

Ejemplo

Calcular la constante de proporcionalidad de los tres pares de lados correspondientes de ambos triángulos. Verificar que las constantes de proporcionalidad son iguales en ambos triángulos, y por lo tanto, los triángulos son proporcionales o semejantes.



Calculamos las constantes de proporcionalidad entre los lados correspondientes de los triángulos.

Triángulo 1.

$$k_{1,2} = \frac{\text{Lado 1}}{\text{Lado 2}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

Triángulo 2.

$$k_{1,2} = \frac{\text{Lado 1}}{\text{Lado 2}} = \frac{3}{4} \rightarrow k_{1,2} = \frac{3}{4}$$

Triángulo 1.

$$k_{1,3} = \frac{\text{Lado 1}}{\text{Lado 3}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Triángulo 2.

$$k_{1,3} = \frac{\text{Lado 1}}{\text{Lado 3}} = \frac{3}{2} \rightarrow k_{1,3} = \frac{3}{2}$$

Triángulo 1.

$$k_{2,3} = \frac{\text{Lado 2}}{\text{Lado 3}} = \frac{8}{4} = 2$$

Triángulo 2.

$$k_{2,3} = \frac{\text{Lado 2}}{\text{Lado 3}} = \frac{4}{2} = 2 \rightarrow k_{2,3} = 2$$

Proporcionalidad entre los lados correspondientes de dos triángulos

Una vez que hemos verificado que los triángulos son proporcionales, podemos establecer la proporcionalidad entre los lados correspondientes de los dos triángulos.

Tomado como referencia el triángulo 2.

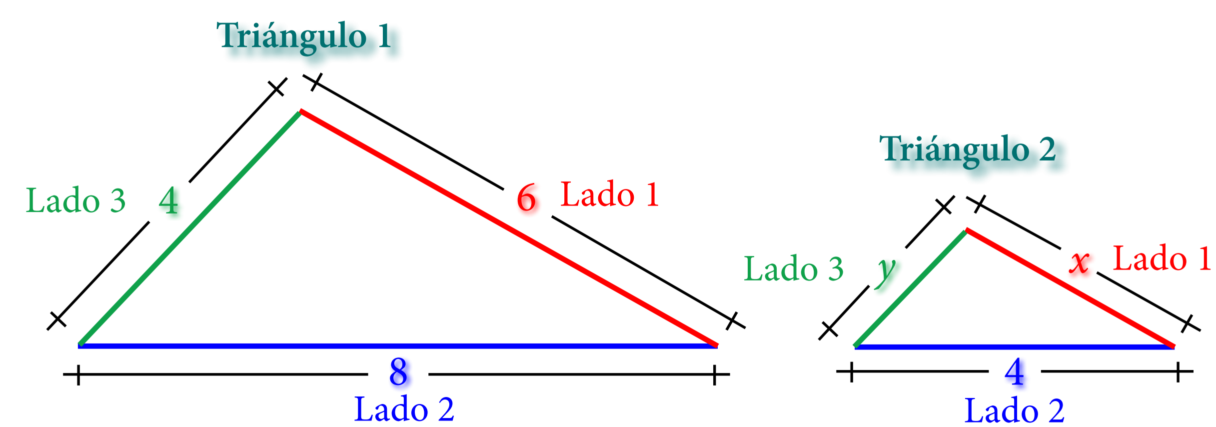
$$\frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{4}{2} \rightarrow \frac{6}{3} = \frac{8}{4} \rightarrow \frac{8}{4} = \frac{4}{2} \rightarrow \frac{6}{3} = \frac{4}{2}$$

Tomado como referencia el triángulo 1.

$$\frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{2}{4} \rightarrow \frac{3}{6} = \frac{4}{8} \rightarrow \frac{4}{8} = \frac{2}{4} \rightarrow \frac{3}{6} = \frac{2}{4}$$

Ejemplo

Sabemos que los dos triángulos son proporcionales o semejantes, determinar la longitud desconocida x del lado rojo y la longitud desconocida y del lado verde.



Como sabemos que los triángulos son proporcionales o semejantes, podemos calcular la longitud desconocida x del lado rojo y la longitud desconocida y del lado verde estableciendo la proporcionalidad de los lados correspondientes.

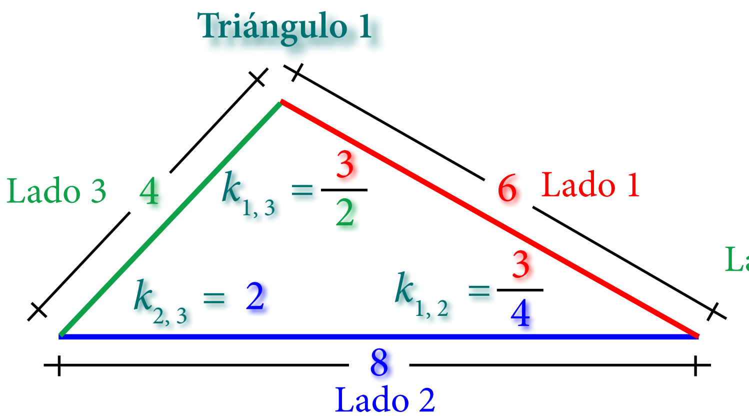
$$\frac{x}{6} = \frac{4}{8} \rightarrow x = \frac{4}{8} \times 6 \rightarrow x = \frac{4 \times 6}{8} \rightarrow x = 3$$

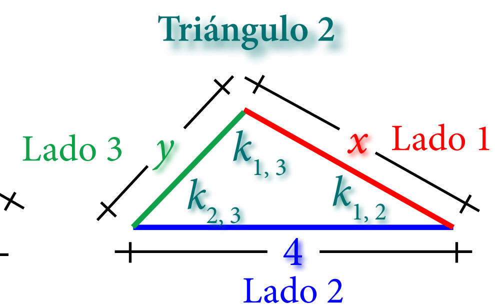
$\times$

$$\frac{y}{4} = \frac{4}{8} \rightarrow y = \frac{4}{8} \times 4 \rightarrow y = \frac{4 \times 4}{8} \rightarrow y = 2$$

$\times$

En el ejemplo anterior, calculamos las constantes de proporcionalidad de los tres pares de lados correspondientes. Porque los triángulos son semejantes, las constantes de proporcionalidad de ambos triángulos son iguales. Conociendo las constantes de proporcionalidad de un triángulo, las usamos en el otro para determinar la longitud desconocida x del lado rojo y la longitud desconocida y del lado verde.





$$k_{1,2} = \frac{3}{4} = \frac{x}{4} \rightarrow \frac{x}{4} = \frac{3}{4} \rightarrow x = \frac{3}{4} \times 4 \rightarrow x = \frac{3 \times 4}{4}$$

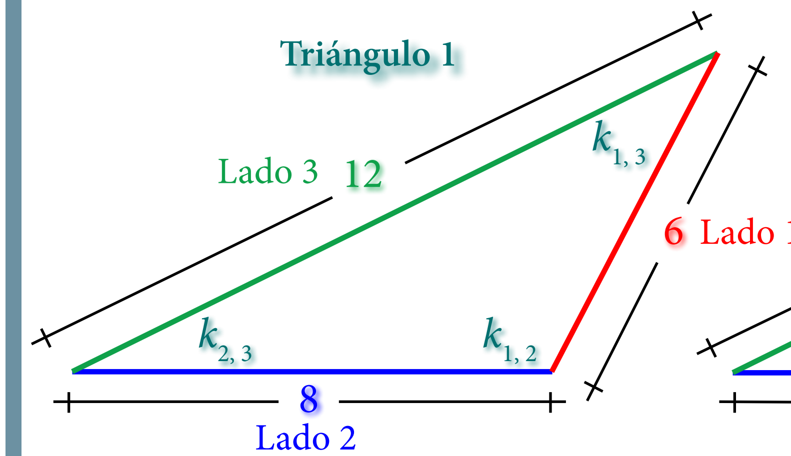
$$\rightarrow x = 3$$

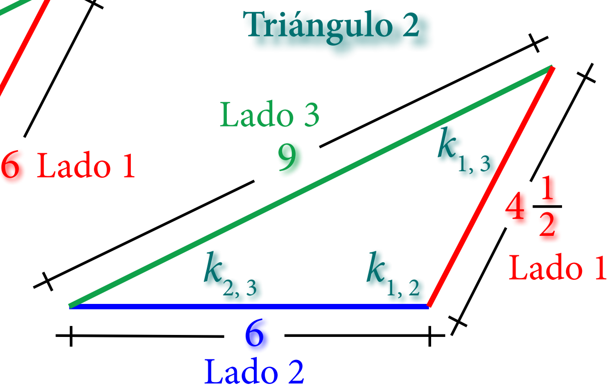
$$k_{2,3} = 2 = \frac{4}{y} \rightarrow \frac{4}{y} = 2 \rightarrow \frac{y}{4} = \frac{1}{2} \rightarrow y = \frac{1}{2} \times 4$$

$$y = \frac{1 \times 4}{2} \rightarrow y = 2$$

Ejemplo

Verificar que los triángulos son semejantes o proporcionales.





Calculamos las constantes de proporcionalidad entre los lados correspondientes de los triángulos.

Triángulo 1.

$$k_{1,2} = \frac{\text{Lado 1}}{\text{Lado 2}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

Triángulo 2.

$$k_{1,2} = \frac{\text{Lado 1}}{\text{Lado 2}} = \frac{4\frac{1}{2}}{6} = \frac{4 + \frac{1}{2}}{6} = \frac{\frac{8}{2} + \frac{1}{2}}{6} = \frac{\frac{9}{2}}{6}$$

$$k_{1,2} = \frac{\text{Lado 1}}{\text{Lado 2}} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \rightarrow k_{1,2} = \frac{3}{4}$$

Triángulo 1.

$$k_{1,3} = \frac{\text{Lado 1}}{\text{Lado 3}} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Triángulo 2.

$$k_{1,3} = \frac{\text{Lado 1}}{\text{Lado 3}} = \frac{4\frac{1}{2}}{9} = \frac{4 + \frac{1}{2}}{9} = \frac{\frac{8}{2} + \frac{1}{2}}{9} = \frac{\frac{9}{2}}{9}$$

$$k_{1,3} = \frac{\text{Lado 1}}{\text{Lado 3}} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2} \rightarrow k_{1,3} = \frac{1}{2}$$

Triángulo 1.

$$k_{2,3} = \frac{\text{Lado 2}}{\text{Lado 3}} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

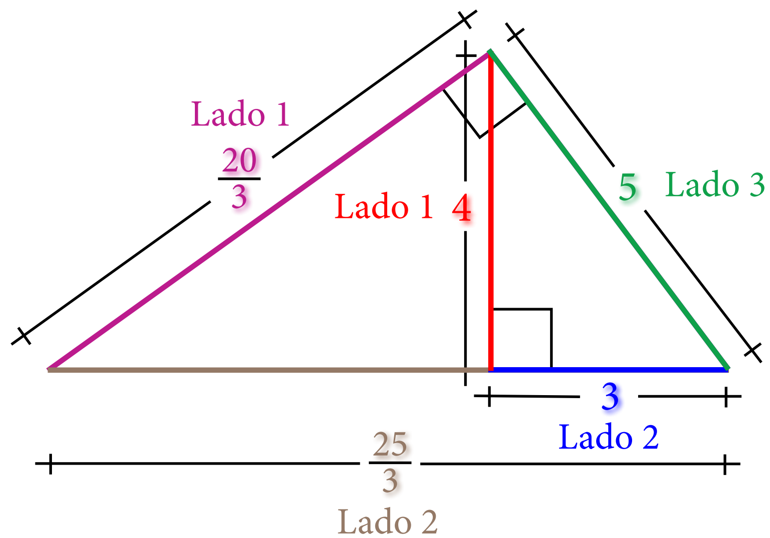
Triángulo 2.

$$k_{2,3} = \frac{\text{Lado 2}}{\text{Lado 3}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \rightarrow k_{2,3} = \frac{2}{3}$$

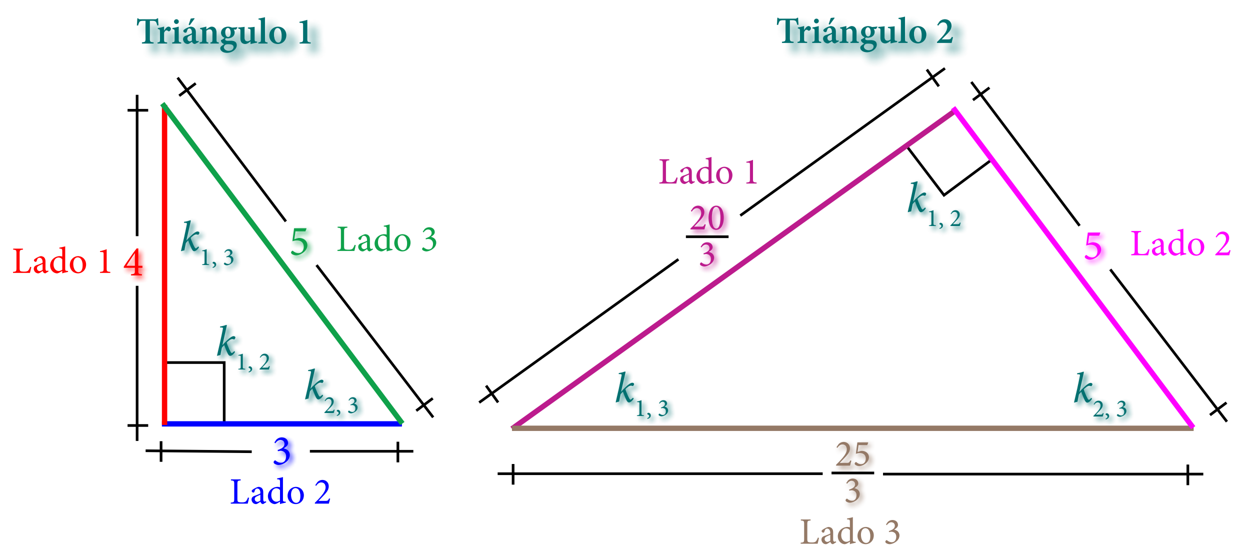
Los triángulos son semejantes o proporcionales ya que los lados correspondientes tienen la misma constante de proporcionalidad k.

Ejemplo

Demostrar que el triángulo: $\frac{20}{3}$, $\frac{25}{3}$, 5 es semejante al triángulo: 3, 4, 5.



Para visualizar mejor el triángulo 1 y el triángulo 2, los dibujamos en forma separada.



Para identificar los lados correspondientes de los dos triángulos, utilizamos el ángulo recto como referencia.

El ángulo recto está formado por dos catetos, uno mayor al otro. Identificamos como *lado 1* al cateto más grande y *lado 2* al cateto menor.

El *lado 3*, es la hipotenusa de los triángulos.

Calculamos las constantes de proporcionalidad entre los lados correspondientes de los triángulos.

Utilizamos el ángulo recto para localizar los lados correspondientes.

Triángulo 1. **Triángulo 2.**

$$k_{1,2} = \frac{\text{Lado 1}}{\text{Lado 2}} = \frac{4}{3} \qquad k_{1,2} = \frac{\text{Lado 1}}{\text{Lado 2}} = \frac{\frac{20}{3}}{5} = \frac{20}{15} = \frac{4}{5}$$

$$k_{1,2} = \frac{4}{3} = \frac{4}{5}$$

Triángulo 1. **Triángulo 2.**

$$k_{1,3} = \frac{\text{Lado 1}}{\text{Lado 3}} = \frac{4}{5} \qquad k_{1,3} = \frac{\text{Lado 1}}{\text{Lado 3}} = \frac{\frac{20}{3}}{\frac{25}{3}} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

$$k_{1,3} = \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$$

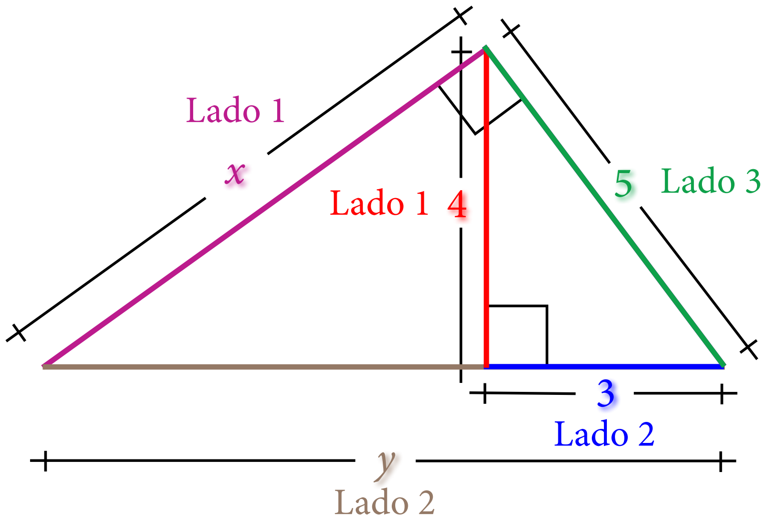
Triángulo 1. **Triángulo 2.**

$$k_{2,3} = \frac{\text{Lado 2}}{\text{Lado 3}} = \frac{3}{5} \qquad k_{2,3} = \frac{\text{Lado 2}}{\text{Lado 3}} = \frac{5}{\frac{25}{3}} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

$$k_{2,3} = \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$$

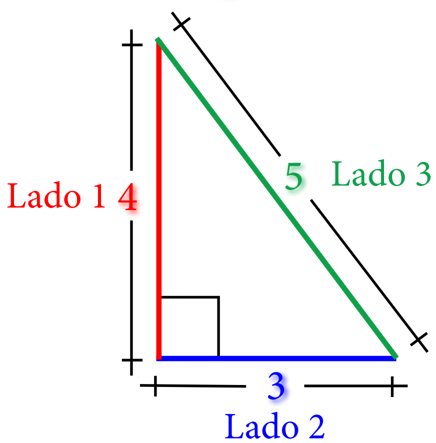
Los triángulos son semejantes o proporcionales ya que los lados correspondientes tienen la misma constante de proporcionalidad k.

Ahora que sabemos que los triángulos son semejantes o proporcionales, conociendo las dimensiones de alguno de los triángulos, podemos calcular las dimensiones del otro.

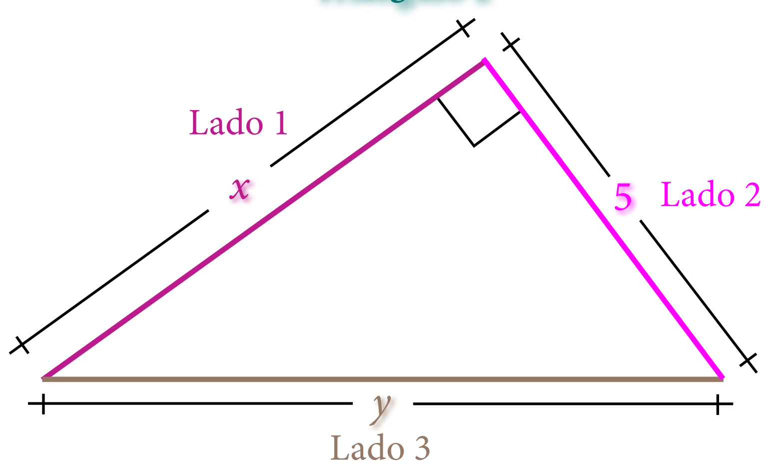


Para visualizar mejor el triángulo 1 y el triángulo 2, los dibujamos en forma separada.

Triángulo 1



Triángulo 2



Como sabemos que los triángulos son proporcionales o semejantes, podemos calcular la longitud desconocida *x* del lado 1 y la longitud desconocida *y* del lado 3 estableciendo la proporcionalidad de los lados correspondientes.

$$\frac{x}{4} = \frac{5}{3} \rightarrow x = \frac{5}{3} \times 4 \rightarrow x = \frac{5 \times 4}{3} \rightarrow x = \frac{20}{3}$$

$$\frac{y}{5} = \frac{5}{3} \rightarrow y = \frac{5}{3} \times 5 \rightarrow x = \frac{5 \times 5}{3} \rightarrow x = \frac{25}{3}$$

Regla de Tres

Quinto y Sexto Niveles de Abstracción

Aplicaciones de las proporciones

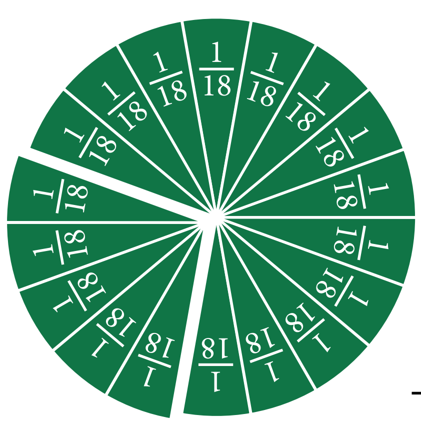
Las proporciones las aplicamos para resolver problemas. La más importante de las aplicaciones es la regla de tres. Otras aplicaciones son la razón y la distribución proporcional.

Regla de tres

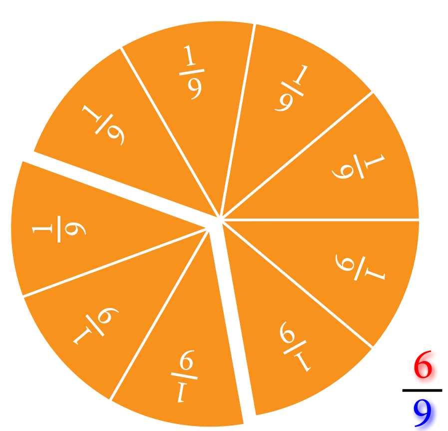
La regla de tres es equivalente a la proporción entre dos pares de rectas, en la cual solamente conocemos la longitud de tres rectas y queremos calcular la longitud de la cuarta recta.

Le llamamos regla de tres porque conocemos tres datos.

Recordemos que las fracciones equivalentes también son proporciones.



$\frac{12}{18}$



$\frac{6}{9}$

como

es a $\quad \frac{12}{18} = \frac{6}{9} \quad$ es a

La multiplicación y la división son operaciones inversas

Recordemos también que podemos conocer el valor desconocido en una proporción, utilizando la propiedad de la multiplicación y la división como operaciones inversas.

$$\frac{x}{7} = \frac{42}{14} \;\rightarrow\; x = \frac{42}{14} \times 7 \;\rightarrow\; x = \frac{42 \times 7}{14} \;\rightarrow\; x = \frac{42}{2} \;\rightarrow\; x = 21$$

$\times$

Ejemplo

Obtener el valor desconocido *x*, de la proporción.

$$\frac{x}{18} = \frac{6}{9} \;\rightarrow\; x = \frac{6}{9} \times 18 \;\rightarrow\; x = \frac{6 \times 18}{9} \;\rightarrow\; x = 12$$

$\times$

Para resolver problemas de regla de tres, seguimos este mismo procedimiento.

Ejemplo

Pintamos 120 metros cuadrados con 10 litros de pintura. ¿Cuántos metros cuadrados podemos pintar, si solamente tenemos 5 litros de pintura?

Este problema nos sirve para entender y demostrar que la regla de tres, es una aplicación de las proporciones.

Datos del problema

120 m² *se pintan con* 10 litros.

x m² *se pintan con* 5 litros.

Porque este problema es muy sencillo, estudiando con detenimiento los datos, nos damos cuenta que si contamos con la mitad de la pintura, entonces podemos pintar la mitad del área.

Dibujo del problema

Cuando sea posible, es importarte hacer un dibujo del problema.

$$\frac{120 \text{ m}^2}{10 \text{ litros}} \qquad \frac{x \text{ m}^2}{5 \text{ litros}}$$

Plantear el problema

Ahora vamos a plantearlo, utilizando proporciones. El lenguaje que usamos al plantearlo es muy importante.

Si pintamos 120 m² con 10 litros, ¿cuántos m² pintamos con 5 litros?

como

$$\text{es a} \quad \frac{120 \text{ m}^2}{10 \text{ litros}} = \frac{x \text{ m}^2}{5 \text{ litros}} \quad \text{es a}$$

Es muy importante ser consistente con las unidades. En el numerador y en el denominador de ambas fracciones debe haber las mismas unidades.

Solución

Para resolver las proporciones, es conveniente que la incógnita x, esté del lado izquierdo de la igualdad.

$$\frac{x}{5} = \frac{120}{10} \quad \rightarrow \quad x = \frac{120}{10} \times 5 \quad \rightarrow \quad x = \frac{120 \times 5}{10}$$

$$\times$$

$$x = \frac{120}{2} \quad \rightarrow \quad x = 60 \text{ m}^2$$

Ahora resolvemos el problema, si tenemos 12 litros.

Datos del problema

120 m² *se pintan con* 10 litros.

x m² *se pintan con* 12 litros.

Plantear el problema

Si pintamos 120 m² con 10 litros, ¿cuántos m² pintamos con 5 litros?

como

$$\text{es a} \quad \frac{120 \text{ m}^2}{10 \text{ litros}} = \frac{x \text{ m}^2}{12 \text{ litros}} \quad \text{es a}$$

Solución

Para resolver las proporciones, es conveniente que la incógnita x, esté del lado izquierdo de la igualdad.

$$\frac{x}{12} = \frac{120}{10} \quad \rightarrow \quad x = \frac{120}{10} \times 12 \quad \rightarrow \quad x = \frac{120 \times 12}{10}$$

$$\times$$

$$x = 12 \times 12 \quad \rightarrow \quad x = 144 \text{ m}^2$$

Ejemplo

En un día completo de trabajo, 6 carpinteros construyeron 22 metros de cerca. Al día siguiente, se presentan a trabajar 9 carpinteros. ¿Cuántos metros de cerca construirán, si trabajan el día completo?

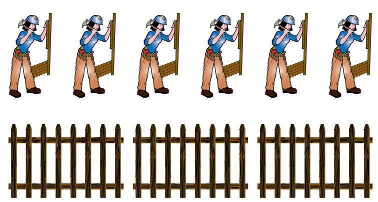
Datos del problema

6 carpinteros *construyen* 22 metros de cerca.

9 carpinteros *construyen* x metros de cerca.

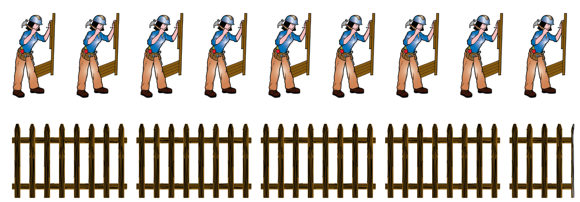
Dibujo del problema

Cuando sea posible, es importarte hacer un dibujo del problema.



22 m

$$\frac{6 \text{ carpinteros}}{22 \text{ metros}}$$



x m

$$\frac{9 \text{ carpinteros}}{x \text{ metros}}$$

Plantear el problema

6 carpinteros construyen 22 metros, 9 carpinteros ¿cuántos metros construyen?

como

$$\text{es a}\quad \frac{6 \text{ carpinteros}}{22 \text{ metros}} = \frac{9 \text{ carpinteros}}{x \text{ metros}} \quad \text{es a}$$

Solución

Para que la aplicación de la propiedad de la multiplicación y la división como operaciones inversas, es conveniente que la incógnita x se encuentre del lado izquierdo y en el numerador.

Primero escribimos la igualdad colocando la fracción que tiene a la incógnita del lado izquierdo.

$$\frac{6}{22} = \frac{9}{x} \longrightarrow \frac{9}{x} = \frac{6}{22}$$

Recordemos que la proporción la podemos establecer tomando como referencia los carpinteros o los metros. Sin alterar la proporción podemos invertir los términos de ambas fracciones.

$$\frac{9}{x} = \frac{6}{22} \longrightarrow \frac{x}{9} = \frac{22}{6}$$

Aplicamos la propiedad de la división y multiplicación como operaciones inversas.

$$\frac{x}{9} = \frac{22}{6} \longrightarrow x = \frac{22}{6} \times 9 \longrightarrow x = \frac{22 \times 9}{6}$$

$\times$

$$x = \frac{22 \times 3}{2} \longrightarrow x = 33 \text{ m}$$

Razón

Quinto y Sexto Niveles de Abstracción

Viajando a 80 kilómetros por hora, ¿cuántos kilómetros recorremos en 15 minutos?

Concepto de razón

Una razón es una proporción especial, ya que el denominador es siempre 1. Una razón es fácil de usar porque uno de los denominadores es siempre 1.

Las razones las utilizamos con tanta frecuencia, que usamos la palabra por, para establecer la proporción. Utilizamos una nomenclatura especial, para abreviarlas.

Razones más comunes

Kilómetros por hora.

$$\frac{\text{Kilómetros}}{\text{Hora}} \rightarrow \frac{km}{hr} \rightarrow km\,/\,hr$$

Ciclos o revoluciones (vueltas) por hora, minuto o segundo.

$$\frac{\text{Ciclos}}{\text{Hora}} \rightarrow \frac{ciclos}{hr} \rightarrow ciclos\,/\,hr$$

$$\frac{\text{Revoluciones}}{\text{Minuto}} \rightarrow \frac{rev}{m} \rightarrow rev\,/\,m$$

$$\frac{\text{Ciclos}}{\text{Segundo}} \rightarrow \frac{ciclos}{seg} \rightarrow ciclos\,/\,seg$$

=

Kilómetros por litro.

$$\frac{\text{Kilómetros}}{\text{Litro}} \rightarrow \frac{km}{l} \rightarrow km\,/\,l$$

Usamos la regla de tres para resolver las razones.

Ejemplo

Un carro compacto recorre *18 kilómetros* por *litro de gasolina*. ¿Cuántos litros de gasolina se requieren para recorrer 144 kilómetros?

Datos del problema

18 kilómetros *por* 1 litro de gasolina.

144 kilómetros *por* x litros de gasolina.

Plantear el problema

6 carpinteros construyen 22 metros, 9 carpinteros ¿cuántos metros construyen?

$$\frac{\text{18 kilómetros}}{\text{1 litro}} = \frac{\text{144 kilómetros}}{x \text{ litros}}$$

Solución

Para que la aplicación de la propiedad de la multiplicación y la división como operaciones inversas, es conveniente que la incógnita x se encuentre del lado izquierdo y en el numerador.

$$\frac{18}{1} = \frac{144}{x} \rightarrow \frac{144}{x} = \frac{18}{1} \rightarrow \frac{x}{144} = \frac{1}{18}$$

$$\frac{x}{144} = \frac{1}{18} \qquad x = \frac{1}{18} \times 144 \rightarrow x = \frac{1 \times 144}{18}$$

×

$$x = 8 \text{ litros}$$

Ejemplo

Viajando a 80 kilómetros por hora, ¿cuántos kilómetros recorremos en 15 minutos?

Datos del problema

80 kilómetros *en* 1 hora.

x kilómetros *en* 15 minutos.

Plantear el problema

Expresamos 1 hora en minutos.

1 hora es 60 minutos.

$$\frac{80 \text{ kilómetros}}{60 \text{ minutos}} = \frac{x \text{ kilómetros}}{15 \text{ minutos}}$$

Solución

Para que la aplicación de la propiedad de la multiplicación y la división como operaciones inversas, es conveniente que la incógnita x se encuentre del lado izquierdo y en el numerador.

$$\frac{80}{60} = \frac{x}{15} \longrightarrow \frac{x}{15} = \frac{80}{60}$$

$$\frac{x}{15} = \frac{80}{60} \longrightarrow x = \frac{80}{60} \times 15 \longrightarrow x = \frac{80 \times 15}{60}$$

$\times$

$$x = 20\ km$$

Capítulo 10

Promedio
Raíz Cuadrada
Porcentaje
Interés

Promedio

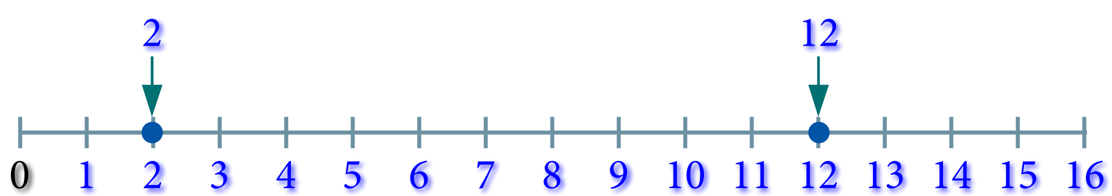
Quinto y Sexto Niveles de Abstracción

Concepto de promedio

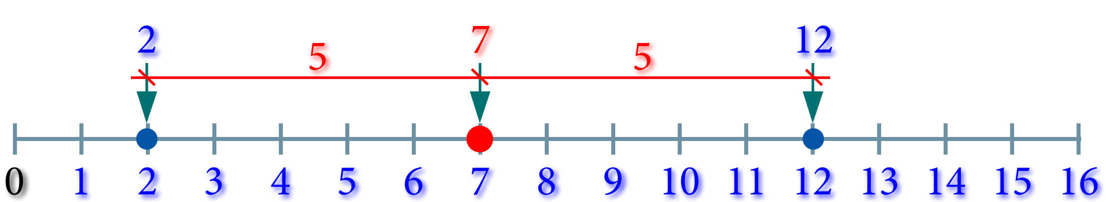
La palabra promedio sugiere el que está en medio. Es un término utilizado en matemáticas para indicar el número que se encuentra en medio o a la mitad de dos números.

El concepto de promedio podemos visualizarlo utilizando la recta de los números reales u objetos.

Concepto de promedio en la recta de los números



El promedio de 2 y 12 es el número que se encuentra en medio, es decir, a la mitad entre los dos.



El promedio de 2 y 12 es 7, ya que es el número que se encuentra a la mitad entre 2 y 12.

En lenguaje matemático se escribe como:

$$\text{Promedio}_{2\text{ y }12} = 7$$

Calculamos el promedio sumando los números y dividiendo la suma entre 2.

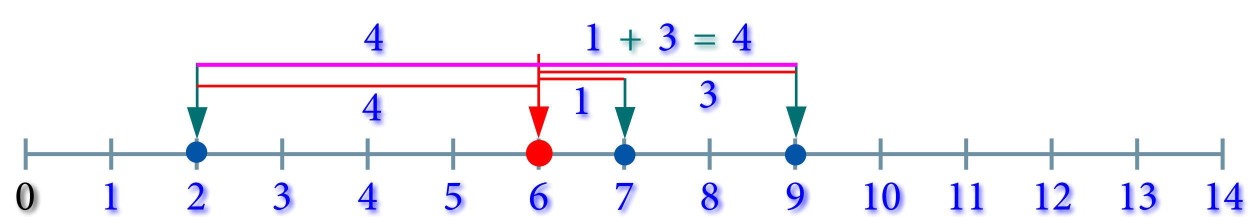
$$\text{Promedio}_{2\text{ y }12} = \frac{2 + 12}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

Ahora tenemos tres números y queremos calcular el promedio. Los tres números contribuyen al promedio, por lo cual los sumamos y el resultado lo dividimos entre 3.

Ejemplo

Calcular el promedio de 2, 7 y 9. Demostrar usando la recta de los números reales, que el promedio es el número que se encuentra en medio.

$$\text{Promedio}_{2,\,7\text{ y }9} = \frac{2 + 7 + 9}{3} = \frac{18}{3} = 6$$



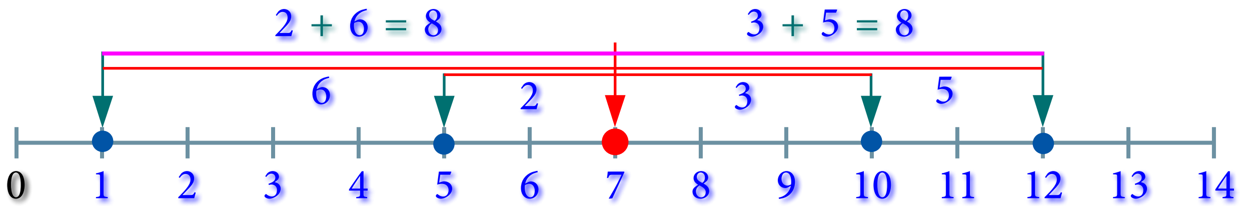
El 7 y el 9 se encuentran a la derecha del promedio, el número 6, y la suma de sus distancias, es igual a la distancia del número 2, que se encuentra a la izquierda, al 6 que es el promedio.

Para generalizar la fórmula, vamos ahora a sacar el promedio de cuatro números y demostrarlo con la recta de los números reales, que se encuentra en medio de los cuatro números.

Ejemplo

Calcular el promedio de 1, 5, 10 y 12. Demostrar usando la recta de los números reales, que el promedio es el número que se encuentra en medio.

$$\text{Promedio}_{1,\,5,\,10\text{ y }12} = \frac{1 + 5 + 10 + 12}{4} = \frac{28}{4} = 7$$



El 1 y el 5 se encuentran a la izquierda del promedio, los números 10 y 12 se encuentran a la derecha del promedio. La suma de las distancias de los números al promedio es la misma.

Podemos ahora crear una fórmula para calcular el promedio de cualquier cantidad de números.

Algoritmo para calcular el promedio

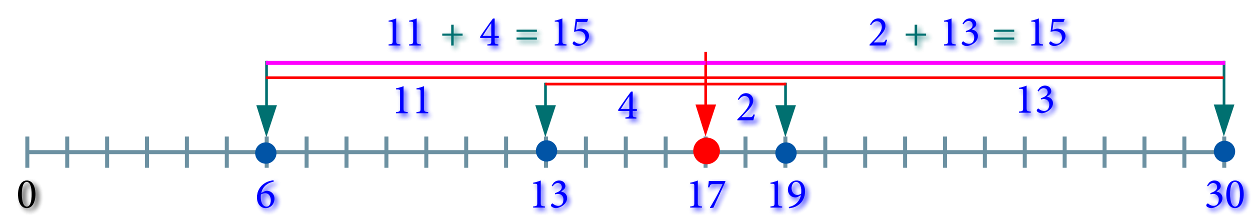
$$\text{Promedio} = \frac{\text{Suma de todos los números}}{\text{Total de números}}$$

Ejemplo

Utilizando la fórmula, calcular el promedio de 6, 13, 19, 30.

$$\text{Promedio}_{6,\,13,\,19\text{ y }30} = \frac{6 + 13 + 19 + 30}{4} = \frac{68}{4} = 17$$

Calculando la suma de las distancias de los números que se encuentran a la izquierda y a la derecha del promedio, podemos demostrar que el resultado es correcto.



Raíz Cuadrada

Quinto y Sexto Niveles de Abstracción

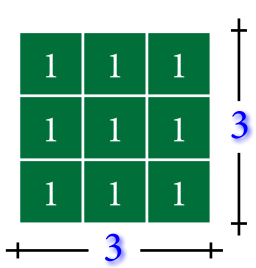
Concepto de raíz

La raíz es el origen o fuente de cosas o eventos. Decimos, el ocio es la raíz de todos los vicios. Es decir, el ocio es en donde se originan los vicios.

Concepto de raíz cuadrada

La raíz cuadrada es el origen de un cuadrado cuya área conocemos, es decir, la dimensión de sus lados.

Conocer un cuadrado significa que sabemos cuál es su área, o sea, la cantidad de superficie contenida en él. Saber cuál es el origen del cuadrado, implica conocer la dimensión de sus lados, es decir, de dónde procede esa área.



Área = Base × Altura.

Área = 3 × 3 = 9 u^2.

Una área de un cuadrado compuesta de 9 unidades cuadradas, la dimensión de la base y la altura es 3.

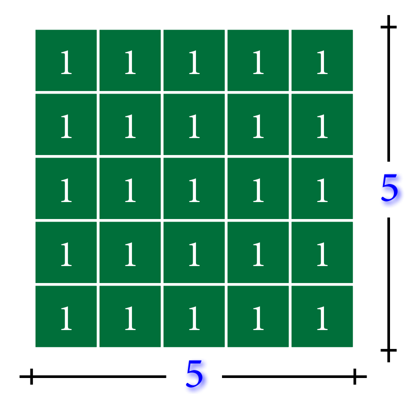
El origen del cuadrado es 3, por lo cual, la raíz cuadrada de 9 es 3.

Raíz cuadrada de 9 = 3.

Notación de raíz cuadrada

Para indicar la raíz cuadrada, utilizamos un símbolo parecido a la casita de la división.

$$\sqrt{9} = 6$$



Área = Base × Altura.

Área = 5 × 5 = 25 u^2.

Una área de un cuadrado compuesta de 25 unidades cuadradas, la dimensión de la base y la altura es 5.

El origen del cuadrado es 5, por lo cual, la raíz cuadrada de 25 es 5.

Raíz cuadrada de 25 = 5.

$$\sqrt{25} = 5$$

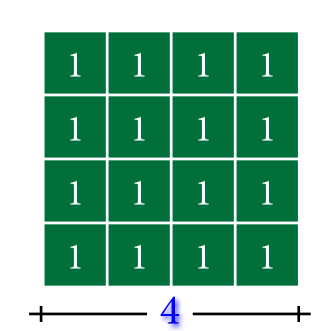
Cálculo de la raíz cuadrada utilizando material didáctico

Para calcular la raíz cuadrada con material didáctico, utilizamos cuadritos. Conociendo el área, formamos un cuadrado. Si la raíz cuadrada no es exacta, entonces calculamos la raíz cuadrada aproximada.

Ejemplo

Utilizando material didáctico calcular la raíz cuadrada de 16.

El área del cuadrado está formada de 16 cuadritos, los cuales los acomodamos formando un cuadrado.



Medimos la dimensión de la base y la altura del cuadrado.

Por lo cual: $\sqrt{16} = 4$

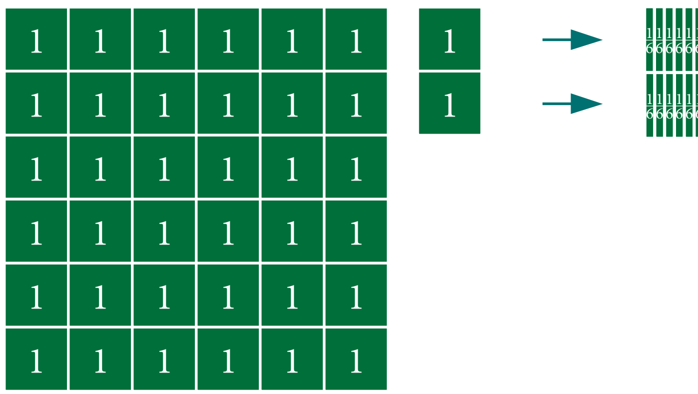
Ejemplo

Utilizando material didáctico calcular la raíz cuadrada de 38.

El área del cuadrado está formada de 38 cuadritos. Podemos acomodar formando un cuadrado 36 cuadritos y sobran 2.

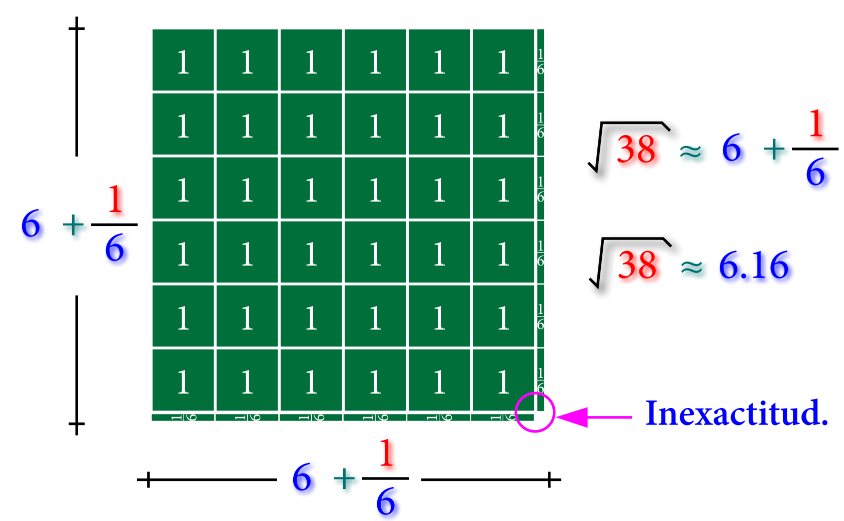
Los dos cuadritos que sobraron, debemos acomodarlos en la base y la altura del cuadrado.

Para hacerlo los dividimos en 6 fracciones cada uno.



Acomodamos las 12 fracciones en la base y la altura del cuadrado.

Medimos la dimensión de la base y la altura del cuadrado.



$$\sqrt{38} \approx 6 + \frac{1}{6}$$

$$\sqrt{38} \approx 6.16$$

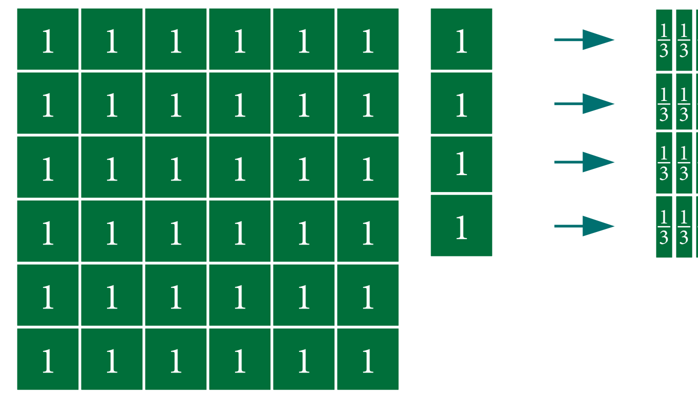
Ejemplo

Utilizando material didáctico calcular la raíz cuadrada de 40.

El área del cuadrado está formada de 40 cuadritos. Podemos acomodar formando un cuadrado 36 cuadritos y sobran 4.

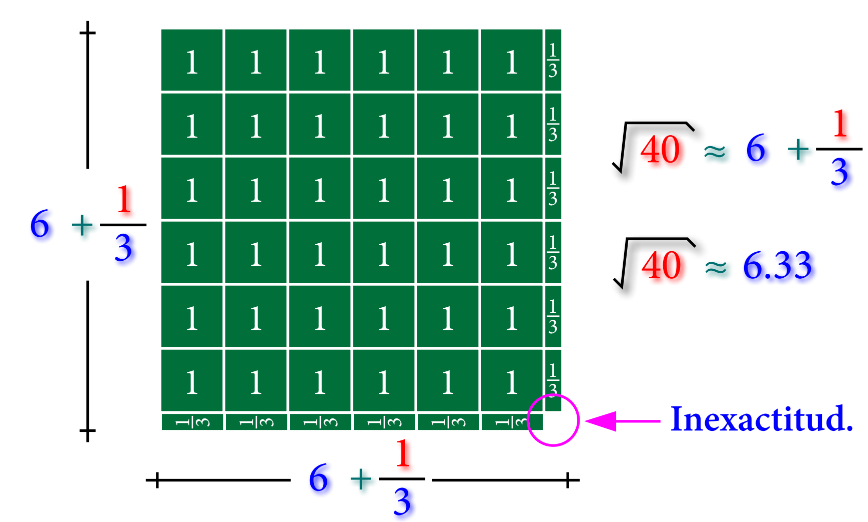
Los cuatro cuadritos que sobraron, debemos acomodarlos en la base y la altura del cuadrado.

Para hacerlo los dividimos en 3 fracciones cada uno.



Acomodamos las 12 fracciones en la base y la altura del cuadrado.

Medimos la dimensión de la base y la altura del cuadrado.



$$\sqrt{40} \approx 6 + \frac{1}{3}$$

$$\sqrt{40} \approx 6.33$$

Estrategia para desarrollar el algoritmo para calcular la raíz cuadrada

Para desarrollar un algoritmo que nos permita en forma ordenada y fácil calcular la raíz cuadrada de cualquier número, utilizamos tres conceptos básicos de aritmética.

Vamos brevemente a repasarlos.

Primer concepto

La división es la operación inversa de la multiplicación. Podemos comprobar que la división es correcta, si efectuamos una multiplicación.

$$\frac{28}{4} = 7 \longrightarrow 28 = 7 \times 4$$

Segundo concepto

La raíz cuadrada es la longitud de los lados de un cuadrado cuya área conocemos.

La raíz cuadrada podemos también enunciarla como el número que al multiplicarlo por sí mismo nos da el número cuya raíz cuadrada queremos conocer.

$$5 \times 5 = 25 \longrightarrow \sqrt{25} = 5$$

$$8 \times 8 = 64 \longrightarrow \sqrt{64} = 8$$

Tercer concepto

El promedio es el número que se encuentra a la mitad de dos números. Se calcula sumando los números y dividiendo la suma entre 2.

$$\text{Promedio}_{2 \text{ y } 12} = \frac{2 + 12}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

Algoritmo para calcular la raíz cuadrada

Para crear un algoritmo que nos permita en forma sencilla obtener el valor de cualquier raíz cuadrada, utilizamos el hecho de que si al dividir un número entre otro número el resultado –*cociente*– es igual al divisor –*denominador*–, entonces, el divisor –*denominador*–, es la raíz cuadrada del dividendo –*numerador*–.

$$\frac{25}{5} = 5 \longrightarrow 25 = 5 \times 5 \longrightarrow \sqrt{25} = 5$$

Son iguales

$$\frac{64}{8} = 8 \longrightarrow 64 = 8 \times 8 \longrightarrow \sqrt{64} = 8$$

Son iguales

La estrategia que vamos a utilizar, consiste en ir aproximando el denominador y el resultado hasta hacerlos iguales.

El algoritmo requiere de tres pasos, por lo cual, lo llamamos en nuestra metodología, el algoritmo de los tres pasos calcular la raíz cuadrada.

Algoritmo de los tres pasos para calcular la raíz cuadrada

Los tres pasos que repetimos tantas veces como sea necesario son:

1. Determinar una raíz aproximada.
2. Dividir el número entre la raíz aproximada.
3. Obtener el promedio del resultado de la división y el divisor. El promedio es la siguiente raíz aproximada.

Ejemplo

Calcular la raíz cuadrada de 30.

Primera iteración

Primer paso

Una raíz aproximada de 30 es 5, ya que 5×5 = 25.

Segundo paso

Dividir el número entre la raíz aproximada.

$$\frac{30}{5} = 6$$

Tercer paso

Obtener el promedio del resultado de la división y el divisor. El promedio es la siguiente raíz aproximada.

$$\text{Promedio}_{5 \text{ y } 6} = \frac{5 + 6}{2} = \frac{11}{2} = 5.5$$

Segunda iteración

Primer paso

La nueva raíz aproximada de 30 es 5.5.

Segundo paso

Dividir el número entre la raíz aproximada.

$$\frac{30}{5.5} = 5.454$$

Tercer paso

Obtener el promedio del resultado de la división y el divisor. El promedio es la siguiente raíz aproximada.

$$\text{Promedio}_{5.5 \text{ y } 5.454} = \frac{5.5 + 5.454}{2} = \frac{10.954}{2} = 5.477$$

Tercera iteración

Primer paso

La nueva raíz aproximada de 30 es 5.477.

Segundo paso

Dividir el número entre la raíz aproximada.

$$\frac{30}{\boxed{5.477}} = \boxed{5.477}$$

Son iguales

El denominador y el resultado de la división son iguales, por lo tanto, 5.477 es la raíz cuadrada de 30, ya que:

$$5.477 \times 5.477 = 30 \quad \longrightarrow \quad \sqrt{30} = 5.477$$

Ejemplo

Calcular la raíz cuadrada de 42.

Primera iteración

Primer paso

Una raíz aproximada de 42 es 6, ya que 6×6 = 36.

Segundo paso

Dividir el número entre la raíz aproximada.

$$\frac{42}{6} = 7$$

Tercer paso

Obtener el promedio del resultado de la división y el divisor. El promedio es la siguiente raíz aproximada.

$$\text{Promedio}_{6 \text{ y } 7} = \frac{6 + 7}{2} = \frac{13}{2} = 6.5$$

Segunda iteración

Primer paso

La nueva raíz aproximada de 42 es 6.5.

Segundo paso

Dividir el número entre la raíz aproximada.

$$\frac{42}{6.5} = 6.46$$

Tercer paso

Obtener el promedio del resultado de la división y el divisor. El promedio es la siguiente raíz aproximada.

$$\text{Promedio}_{6.5 \text{ y } 6.46} = \frac{6.5 + 6.46}{2} = \frac{12.96}{2} = 5.48$$

Tercera iteración

Primer paso

La nueva raíz aproximada de 42 es 6.48.

Segundo paso

Dividir el número entre la raíz aproximada.

$$\frac{42}{\boxed{6.48}} = \boxed{6.48}$$

Son iguales

El denominador y el resultado de la división son iguales, por lo tanto, 6.48 es la raíz cuadrada de 42, ya que:

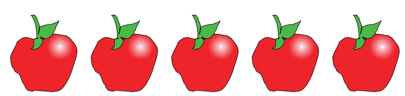
$$6.48 \times 6.48 = 42 \quad \longrightarrow \quad \sqrt{42} = 6.48$$

Porcentaje

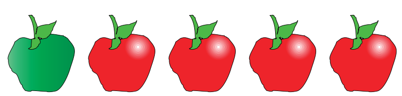
Sexto Nivel de Abstracción

Concepto de porcentaje

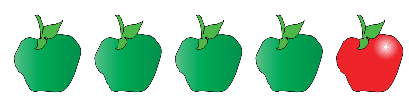
Los números fraccionarios se llaman racionales porque nos informan sobre la relación que el numerador guarda con el denominador.



Unidad



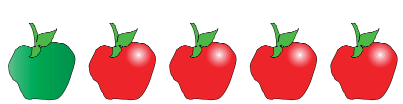
$\frac{1}{5}$ ← Una manzana de ← Cinco manzanas.



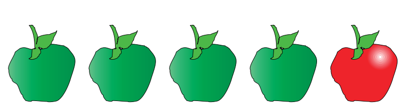
$\frac{4}{5}$ ← Cuatro manzanas de ← Cinco manzanas.

Si en lugar de decir una manzana de cinco manzanas, decimos una de cada cinco manzanas, generalizamos la fracción para cualquier número de manzanas y estamos utilizando el lenguaje de porcentaje.

Por ejemplo, podemos decir una de cada cinco manzanas es verde. No importa el número total de manzanas que tenemos, lo que nos interesa es saber la relación entre las manzanas verdes y las rojas.



$\frac{1}{5}$ ← Una de cada cinco manzanas es verde.



$\frac{4}{5}$ ← Cuatro de cada cinco manzanas es verde.

Para establecer el porcentaje, debemos expresar la fracción utilizando notación decimal.

$$\frac{1}{5} = 0.2 \qquad \frac{4}{5} = 0.8$$

Usando esta estrategia podemos relacionar el *numerador* con el *denominador* de la forma que necesitemos. Expresamos la fracción en notación decimal.

Cuatro de cada 9 personas son hombres.

Hombres → 4, Personas → 9: $\frac{4}{9} = 0.4444$

Tres de cada 10 trabajadores es extranjero.

Extranjeros → 3, Trabajadores → 10: $\frac{3}{10} = 0.3$

La palabra porcentaje viene del término por cien o por ciento.

Establecemos un porcentaje cuando suponemos que la unidad de la fracción es cien.

Notación de porcentaje

Para entender y demostrar el concepto de porcentaje, necesitamos utilizar la notación de porcentaje.

Dado que la palabra porcentaje viene del término por cien o por ciento, creamos un símbolo matemático que lo indique. El símbolo es:

% Se lee como: por ciento, por cien.

Ahora que conocemos la notación vamos a utilizarla resolviendo problemas.

Ejemplo

Sabemos que en salón de clase hay 20 alumnos de los cuales 4 reprobaron el examen de matemáticas. Establecer esta relación utilizando notación de fracción, notación decimal y suponiendo que la población es de 100 alumnos.

Datos del problema

Unidad de la fracción: 20 alumnos.
Reprobados: 4 alumnos.

Notación de fracción y decimal

$$\begin{matrix}\text{Reprobados} \rightarrow \\ \text{Alumnos} \rightarrow\end{matrix} \frac{4}{20} = 0.2$$

Usando lenguaje de fracción decimos: 4 *de* 20 alumnos reprobaron. Usando lenguaje de porcentaje decimos: 4 *de cada* 20 alumnos reprobaron.

Si la población son cien alumnos

Para entender y demostrar el concepto de porcentaje, suponemos que el número de alumnos es 100.

Para hacer el denominador 100, debemos multiplicarlo por 5 y lo mismo hacemos con el numerador. Creamos una fracción equivalente.

$$\begin{matrix}\text{Reprobados} \rightarrow \\ \text{Alumnos} \rightarrow\end{matrix} \frac{4}{20} = \frac{4 \times 5}{20 \times 5} = \frac{20}{100} = 0.2$$

Es equivalente decir: 4 de cada 20 alumnos reprobaron o 20 de cada 100 alumnos reprobaron.

Utilizando el símbolo de porcentaje, en lugar de decir: *20 de cada 100* alumnos reprobaron, decimos: *20 por ciento* de alumnos reprobaron.

$$\begin{matrix}\text{Reprobados} \rightarrow \\ \text{Alumnos} \rightarrow\end{matrix} \frac{4}{20} = \frac{4 \times 5}{20 \times 5} = \frac{20}{100} = 0.2 = 20\ \%$$

Usando la notación de porcentaje escribimos: 20 % y lo expresamos como: 20 por ciento de los alumnos reprobaron.

Cuando planteamos la fracción y la expresamos en notación decimal, podemos fácilmente convertirla a notación de porcentaje, multiplicando por 100 y usando el símbolo %.

$$0.2 = 0.2 \times 100\ \% = 20\ \%$$

Ejemplo

En la línea de producción de una fábrica hay 10 trabajadores de los cuales 3 son extranjeros. Establecer esta relación utilizando notación de fracción, notación decimal y suponiendo que la población es de 100 trabajadores.

Datos del problema

Unidad de la fracción: 10 trabajadores.
Extranjeros: 3 trabajadores.

Notación de fracción y decimal

$$\begin{matrix}\text{Extranjeros} \rightarrow \\ \text{Trabajadores} \rightarrow\end{matrix} \frac{3}{10} = 0.3$$

Usando lenguaje de fracción decimos: 3 *de* 10 trabajadores son extranjeros. Usando lenguaje de porcentaje decimos: 4 *de cada* 10 trabajadores son extranjeros.

Si la población son cien trabajadores

Para entender y demostrar el concepto de porcentaje, suponemos que el número de trabajadores es 100.

Para hacer el denominador 100, debemos multiplicarlo por 10 y lo mismo hacemos con el numerador. Creamos una fracción equivalente.

$$\begin{matrix}\text{Extranjeros} \rightarrow \\ \text{Trabajadores} \rightarrow\end{matrix} \frac{3}{10} = \frac{3 \times 10}{10 \times 10} = \frac{30}{100} = 0.3$$

Es equivalente decir: 3 de cada 10 trabajadores son extranjeros o 30 de cada 100 trabajadores son extranjeros.

Utilizando el símbolo de porcentaje, en lugar de decir: *30 de cada 100* trabajadores son extranjeros, decimos: *30 por ciento* de trabajadores son extranjeros.

$$\begin{matrix}\text{Extranjeros} \rightarrow \\ \text{Trabajadores} \rightarrow\end{matrix} \frac{3}{10} = \frac{3 \times 10}{10 \times 10} = \frac{30}{100} = 0.3 = 30\ \%$$

Usando la notación de porcentaje escribimos: 30 % y lo expresamos como: 30 por ciento de los trabajadores son extranjeros.

Cuando planteamos la fracción y la expresamos en notación decimal, podemos fácilmente convertirla a notación de porcentaje, multiplicando por 100 y usando el símbolo %.

$$0.3 = 0.3 \times 100\ \% = 30\ \%$$

Notación de fracción, notación decimal y porcentaje

Debido a que la notación de porcentaje es solamente una forma de expresar una fracción cuando la unidad de la fracción es 100, no podemos utilizarla para hacer operaciones.

Hacemos operaciones solamente cuando utilizamos notación de fracción o notación decimal.

Debemos desarrollar la habilidad para convertir de notación de fracción a notación decimal, y de notación decimal a notación de porcentaje y viceversa.

Conversión de notación decimal a porcentaje y viceversa

Incluir el símbolo %, implica multiplicar por 100, ya que es lo que significa. Ahora bien, si lo queremos eliminar debemos hacer la operación inversa.

Para convertir de notación decimal a porcentaje, multiplicamos por 100 y agregamos el símbolo %.

Para convertir de porcentaje a notación decimal, dividimos entre 100 y eliminamos el símbolo %.

Ejemplo

Convertir $\frac{7}{12}$ a notación de porcentaje.

Primero debemos convertir la fracción a notación decimal. Lo hacemos usando el algoritmo de la división.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 0.5833 \\ \hline
12 & 7.0 \\
 & 1\ 0\ 0 \\
 & 0\ 0\ 4\ 0 \\
 & \quad\ \ 0\ 4\ 0 \\
 & \quad\quad\ 0\ 4
\end{array}
\quad \longrightarrow \quad \frac{7}{12} = 0.5833
$$

Ahora convertimos de notación decimal a notación de porcentaje.

$$0.5833 = 0.5833 \times 100\ \% = 58.33\ \%$$

Ejemplo

Convertir 36.25% a notación decimal.

Para hacer la conversión a notación decimal, debemos dividir 36.25 entre 100 y eliminar el símbolo %.

$$36.25\ \% = \frac{36.25}{100} = 0.3625 \quad \longrightarrow \quad 36.25\ \% = 0.3625$$

Conversión de notación decimal a notación de fracción

La notación decimal, en la mayoría de los casos, es una forma inexacta de expresar una fracción, por lo que convertir de notación decimal a notación de fracción, no siempre resulta fácil, e incluso, en algunas ocasiones no es posible obtener una única respuesta.

No es de gran utilidad convertir de notación decimal a notación de fracción, sin embargo, en algunas ocasiones nos ayuda a entender mejor un problema.

La estrategia para efectuar la conversión es multiplicar y dividir el número decimal por la misma cantidad. Lo más sencillo es utilizar múltiplos de 10.

Ejemplo

Convertir 0.25 a notación de fracción.

Multiplicamos y dividimos 0.25 por 100 y simplificamos.

$$0.25 = \frac{0.25 \times 100}{100} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} \quad \longrightarrow \quad 0.25 = \frac{1}{4}$$

Ejemplo

Convertir 0.125 a notación de fracción.

Multiplicamos y dividimos 0.125 por 1,000 y simplificamos.

$$0.125 = \frac{0.125 \times 1{,}000}{1{,}000} = \frac{125}{1{,}000} = \frac{25}{200} = \frac{1}{8} \quad \longrightarrow \quad 0.125 = \frac{1}{8}$$

Interés

Sexto y Séptimo Niveles de Abstracción

Definición de interés

En una transacción bancaria, se le llama interés a la cantidad de dinero que el banco cobra por un préstamo, o paga por una cantidad de dinero invertido.

El interés se representa con la letra I.

Capital

Se le llama capital a la cantidad de dinero invertido o al total del préstamo recibido.

El capital se representa con la letra C.

Porcentaje

Se le llama porcentaje en una transacción bancario, a la cantidad de dinero recibido o pagado por cada $100.00.

El porcentaje se representa con la letra P.

Para deducir la fórmula que utilizaremos para calcular el interés, vamos hacer un ejemplo.

Ejemplo

Un banco paga 20% de interés por el capital invertido durante un año. Si invertimos $100.00 durante un año, ¿Cuánto dinero ganamos de interés?

Datos del problema

Capital invertido es $100.00.
Porcentaje que paga el banco es 20%.

Solución

De la definición de porcentaje sabemos que 20% significa que tomamos 20 de 100. Por lo cual, por cada $100.00 invertidos, ganamos $20.00.

Vamos analizar lo que esto significa.

No podemos hacer operaciones en notación de porcentaje, por lo cual debemos convertirlo a notación decimal.

$$20\ \% = \frac{20}{100} = 0.2 \quad \longrightarrow \quad 20\ \% = 0.2$$

Los $20.00 de interés los obtenemos, si multiplicamos el capital: $100.00 por el porcentaje: 0.2.

$$\begin{aligned} C &= 100 \\ P &= 0.2 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} I &= 100 \times 0.2 = \$20 \\ I &= C \times P \end{aligned}$$

Ahora podemos escribir una fórmula que podemos utilizar para calcular el interés de cualquier cantidad.

$$I = C \times P$$

Ejemplo

Un banco paga 12.5% de interés por el capital invertido durante un año. Si invertimos $2,560.00 durante un año, ¿Cuánto dinero ganamos de interés?

Datos del problema

Capital invertido es $2,560.00.
Porcentaje que paga el banco es 12.5%.
¿Cuál es el interés ganado?

$C = \$2,560 \qquad I = x$

$P = 12.5\ \%$

Solución

No podemos hacer operaciones en notación de porcentaje, por lo cual debemos convertirlo a notación decimal.

$$P = 12.5\ \% = \frac{12.5}{100} = 0.125 \quad \longrightarrow \quad P = 12.5\ \% = 0.125$$

Escribimos la fórmula para calcular el interés. $\quad I = C \times P$

Substituimos las letras por su valor. $\quad I = 2,560 \times 0.125$

$I = \$320.00$

La fórmula que hemos deducido, nos sirve para calcular el interés, sin embargo también podemos usarla para calcular el capital o el porcentaje.

Para deducir estas fórmulas, aplicamos la propiedad de la multiplicación y la división como operaciones inversas.

$$\frac{15}{3} = 5 \quad \longrightarrow \quad 15 = 5 \times 3 \quad \longrightarrow \quad \frac{15}{5} = 3$$

$$\frac{I}{P} = C \quad \longrightarrow \quad I = C \times P \quad \longrightarrow \quad \frac{I}{C} = P$$

Formula del interés $\quad I = C \times P$

Formula del capital $\quad C = \dfrac{I}{P}$

Formula del porcentaje $\quad P = \dfrac{I}{C}$

Ejemplo

Solicitamos un préstamo de $23,400 al banco y nos cobran $2,925 de interés. ¿A qué porcentaje nos prestaron el dinero?

Datos del problema

Capital prestado es $23,400.00.
Interés que el banco cobra es $2,925.00.
¿Cuál es el porcentaje?

$C = \$25,000 \qquad P = x$

$I = \$3,750$

Solución

Escribimos la fórmula para calcular el porcentaje. $\quad P = \dfrac{I}{C}$

Substituimos las letras por su valor. $\quad P = \dfrac{3,750}{25,000} = 0.15$

Convertimos el porcentaje de notación decimal a notación de porcentaje.

$$P = 0.15 = 0.15 \times 100\ \% = 15\ \%$$

$$P = 15\ \%$$

Ejemplo

Si el banco paga 8.75% de interés anual en una cuenta de ahorros. ¿Cuánto dinero necesitamos depositar, si al final del año queremos ganar $3,820 en intereses?

Datos del problema

Porcentaje es 8.75%.
Interés ganado es $3,820.00.
¿Cuál es el capital?

$P = 8.75\ \% \qquad C = x$

$I = \$3,820$

Solución

No podemos hacer operaciones en notación de porcentaje, por lo cual debemos convertirlo a notación decimal.

$$P = 8.75\ \% = \frac{8.75}{100} = 0.0875 \quad \longrightarrow \quad P = 8.75\ \% = 0.0875$$

Escribimos la fórmula para calcular el capital.

$$C = \frac{I}{P}$$

Substituimos las letras por su valor.

$$C = \frac{\$3,820}{0.0875} = \$43,657$$

$$C = \$43,657$$

Interés compuesto

El interés compuesto es la cantidad de dinero que pagamos o recibimos sobre un determinado periodo de tiempo, tomando en cuenta que el capital se va incrementando debido a los intereses acumulados.

Para calcular el interés compuesto de cada periodo, sumamos el interés ganado en ese periodo al capital, y calculamos el nuevo interés usando el capital del periodo anterior.

Para calcular el interés compuesto es muy útil hacer una tabla.

Ejemplo

Invertimos \$1,000 en un banco que paga 10% de interés mensual compuesto. ¿Cuánto dinero tendremos después de 6 meses?

Datos del problema

Capital invertido es \$1,000.00.
Porcentaje que paga el banco es 10% de interés mensual.
Tiempo transcurrido es 6 meses.
¿Total de capital a los 6 meses?

$$C_{Inicial} = \$1,000.00$$

$$P = 10\ \%\ \text{Mensual}$$

$$T = 6\ \text{meses}$$

$$C_{Final} = x$$

Solución

No podemos hacer operaciones en notación de porcentaje, por lo cual debemos convertirlo a notación decimal.

$$P = 10\ \% = \frac{10}{100} = 0.1 \quad \longrightarrow \quad P = 10\ \% = 0.1$$

Hacemos una tabla para calcular el interés que cada mes se acumula al capital.

T	$\text{Capital}_{Inicial}$	P	Interés ($I = C_{Inicial} \times P$)	Capital_{Final} ($C_{Final} = C_{Inicial} + I$)
	\$1,000.00	0.1	1,000.00 × 0.1 = 100.00	1,000.00 + 100.00 = \$1,100.00
1	\$1,100.00	0.1	1,100.00 × 0.1 = 110.00	1,100.00 + 110.00 = \$1,210.00
2	\$1,210.00	0.1	1,210.00 × 0.1 = 121.00	1,210.00 + 121.00 = \$1,331.00
3	\$1,331.00	0.1	1,331.00 × 0.1 = 133.10	1,331.00 + 133.10 = \$1,464.10
4	\$1,464.10	0.1	1,464.00 × 0.1 = 146.41	1,464.10 + 146.41 = \$1,610.51
5	\$1,610.51	0.1	1,610.51 × 0.1 = 161.05	1,610.51 + 161.05 = \$1,771.56
6	\$1,771.56			

Fórmula para calcular el interés compuesto

Utilizando el ejemplo anterior, vamos a crear una fórmula para calcular el interés compuesto, sin necesidad de calcular mes a mes el interés y el nuevo capital.

Primer mes

Primero calculamos el interés generado en un periodo.

$$I = C_{Inicial} \times P$$

Después sumamos el interés al capital inicial.

$$C_{Final} = C_{Inicial} + I$$

$$C_{Final} = \underbrace{1,000.00}_{C_{Inicial}} + \underbrace{\underbrace{0.1}_{P} \times \underbrace{1,000.00}_{C_{Inicial}}}_{I}$$

Factorizamos \$1,000.00 de la fórmula.

$$C_{Final} = 1,000.00(1 + 0.1)$$

Sumamos la cantidad que está dentro del paréntesis y obtenemos el capital final del primer periodo.

$$C_{Final} = 1,000.00 \times 1.1$$

Para calcular el Capital_{Final} al terminar el primer mes, multiplicamos el $\text{Capital}_{Inicial}$ por 1.1.

Para calcular el Capital_{Final} al terminar el segundo mes, haremos lo mismo.

Segundo mes

Al iniciar el segundo mes, el C_{Inicial} es: $C_{\text{Inicial}} = 1{,}000.00 \times 1.1$

Siguiendo el mismo procedimiento, multiplicamos el C_{Inicial} por 1.1.

$C_{\text{Final}} = 1{,}000.00 \times 1.1 \times 1.1$

Para calcular el $\text{Capital}_{\text{Final}}$ al terminar el segundo mes, multiplicamos el $\text{Capital}_{\text{Inicial}}$ por 1.1.

Tercer mes

Al iniciar el tercer mes, el C_{Inicial} es: $C_{\text{Inicial}} = 1{,}000.00 \times 1.1 \times 1.1$

Siguiendo el mismo procedimiento, multiplicamos el C_{Inicial} por 1.1.

$C_{\text{Final}} = 1{,}000.00 \times 1.1 \times 1.1 \times 1.1$

Para calcular el $\text{Capital}_{\text{Final}}$ al terminar el tercer mes, multiplicamos el $\text{Capital}_{\text{Inicial}}$ por 1.1.

Siguiendo el mismo procedimiento, calculamos el $\text{Capital}_{\text{Final}}$ para el cuarto, quinto y sexto mes.

Primer mes $C_{\text{Final}} = 1{,}000.00 \times 1.1$

Segundo mes $C_{\text{Final}} = 1{,}000.00 \times 1.1 \times 1.1 = 1{,}000.00\,(1.1)^2$

Tercer mes $C_{\text{Final}} = 1{,}000.00 \times 1.1 \times 1.1 \times 1.1 = 1{,}000.00\,(1.1)^3$

Cuarto mes $C_{\text{Final}} = 1{,}000.00 \times 1.1 \times 1.1 \times 1.1 \times 1.1 = 1{,}000.00\,(1.1)^4$

Quinto mes $C_{\text{Final}} = 1{,}000.00 \times 1.1 \times 1.1 \times 1.1 \times 1.1 \times 1.1 = 1{,}000.00\,(1.1)^5$

Sexto mes $C_{\text{Final}} = 1{,}000.00 \times 1.1 \times 1.1 \times 1.1 \times 1.1 \times 1.1 \times 1.1 = 1{,}000.00\,(1.1)^6$

Para crear la fórmula, definimos una nueva letra para representar los meses. Utilizamos la letra n.

Calculamos el C_{Final}, multiplicamos el C_{Inicial} por 1.1. Sabemos que 1.1 es $(1 + 0.1)$.

$C_{\text{Final}} = 1{,}000.00(1 + 0.1)$ $\quad C_{\text{Inicial}} = 1{,}000.00$ y $P = 0.1$.

$C_{\text{Final}} = C_{\text{Inicial}}\,(1 + P)^1$

Al término del primer mes: $n = 1$. $\quad C_1 = C_{\text{Inicial}}\,(1 + P)^1$

Al término del segundo mes: $n = 2$. $\quad C_2 = C_{\text{Inicial}}\,(1 + P)^2$

Al término del tercer mes: $n = 3$. $\quad C_3 = C_{\text{Inicial}}\,(1 + P)^3$

Al término del cuarto mes: $n = 4$. $\quad C_4 = C_{\text{Inicial}}\,(1 + P)^4$

Al término del quinto mes: $n = 5$. $\quad C_5 = C_{\text{Inicial}}\,(1 + P)^5$

Al término del sexto mes: $n = 6$. $\quad C_6 = C_{\text{Inicial}}\,(1 + P)^6$

Fórmula para calcular el interés compuesto

$$C_n = C_{\text{Inicial}}\,(1 + P)^n$$

Ejemplo

Invertimos en un banco que paga 8% de interés mensual compuesto \$2,000. ¿Cuánto dinero tendremos después de 3 meses?

Datos del problema

Capital invertido es \$2,000.00.
Porcentaje que paga el banco es 8% de interés mensual.
Tiempo transcurrido es 3 meses.
¿Total de capital a los 3 meses?

$C_{\text{Inicial}} = \$2{,}000.00 \qquad n = 3 \text{ meses}$

$P = 8\ \%\ \text{Mensual} \qquad C_{\text{Final}} = x$

Solución

No podemos hacer operaciones en notación de porcentaje, por lo cual debemos convertirlo a notación decimal.

$$P = 8\ \% = \frac{8}{100} = 0.08 \longrightarrow P = 8\ \% = 0.08$$

$$C_n = C_{\text{Inicial}}\,(1 + P)^n$$

$$C_3 = \$2{,}000.00\,(1 + 0.08)^3$$

$$C_3 = \$2{,}000.00\,(1.08)^3$$

$$C_3 = \$2{,}519.42$$