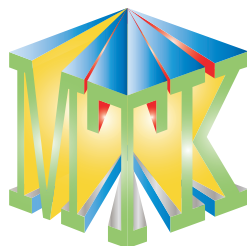


Álgebra 3

Incluye Trigonometría Básica
Noveno Nivel de Abstracción

José Luis Moreno Aranda



Álgebra 3

Noveno Nivel de Abstracción

José Luis Moreno Aranda

Grupo Mathematiké, SA de CV

Prohibido Reproducir

Todos los Derechos Reservados

Impreso en México

2020

ISBN 978-970-93600-8-0

Contenido

Introducción

La pedagogía de la espiral ascendente de las matemáticas	vii
La estrategia pedagógica consiste en cinco pasos	vii
Material didáctico Mathematiké	viii
Objetivo del libro	viii
Cómo está organizado el libro	viii
Niveles en la apropiación del conocimiento matemático	viii
Nuestra página en Internet	viii

Capítulo 1

Solución de una Ecuación

Concepto de Ecuación	11
Solución o Raíz de Una Ecuación	11
Reglas Para Despejar Una Variable de Una Ecuación	12
Ecuaciones con expresiones algebraicas combinadas	12
Ecuaciones en las cuales hay más de una letra o variable	12
Ecuaciones en las cuales sólo hay una letra o incógnita	13
Clasificación de las ecuaciones según el máximo exponente de su incógnita	15

Ecuaciones de Primer Grado

Definición de ecuación de primer grado o lineal	16
Solución o raíz de una ecuación lineal	16
Problemas de aplicación de ecuaciones lineales	18

Ecuaciones de Segundo Grado

Definición de ecuación de segundo grado o cuadrática	25
Teorema del factor cero	25
Solución o raíces de una ecuación de segundo grado	25
Casos para la solución de una ecuación de segundo grado	26
Solución de una ecuación de segundo grado sin término independiente	26
Solución de una ecuación de segundo grado sin término lineal	27
Solución de una ecuación de segundo grado cuando la ecuación puede factorizarse en dos binomios	28
Solución de una ecuación de segundo grado completando el cuadrado para poder factorizarla	29
Solución de una ecuación de segundo grado usando la fórmula general	32
Problemas de aplicación de ecuaciones de segundo grado	34

Gráfica de una Ecuación

Representación geométrica de una ecuación	40
Variables dependientes y variables independientes	40
Sistema coordenado cartesiano	40
Pares ordenados (x, y)	41
Tabulación de una ecuación	41

Ecuación de primer grado o lineal	43
Gráfica de Una Ecuación de Primero y Segundo Grado	
Ecuación de segundo grado o cuadrática	44
Capítulo 2	
Sistemas de Ecuaciones	
Definición de un sistema de ecuaciones	47
Sistemas de ecuaciones de dos variables	47
Sistemas de ecuaciones de tres variables	47
Sistemas de ecuaciones lineales	48
Sistemas de ecuaciones no lineales	48
Solución de Un Sistemas de Ecuaciones	
Solución gráfica de un sistema de ecuaciones	49
Método de sustitución para resolver un sistema de dos ecuaciones	52
Solución de Un Sistema Lineal de Dos Ecuaciones	
Método de igualación para resolver un sistema de ecuaciones	56
Método de suma o eliminación para resolver un sistema de ecuaciones	60
Solución de Un Sistema Lineal de Tres Ecuaciones	
Combinación de los tres métodos de solución de un sistema de ecuaciones	65
Problemas de Aplicación de Sistemas Lineales	
Problemas de aplicación de sistemas lineales con dos incógnitas	70
Capítulo 3	
Desigualdades	
Concepto de desigualdad	81
Concepto de desigualdad	81
Las desigualdades en la recta de los números reales	81
Las desigualdades con letras	82
Notación utilizada en las desigualdades	82
Propiedades de las desigualdades	86
Solución de Una Desigualdad de Primer Grado	
Solución de desigualdades de primer grado o lineales	89
Problemas de Aplicación de Desigualdades	
Problemas de aplicación de desigualdades lineales	93
Sistemas de Desigualdades Lineales	
Definición de sistemas de desigualdades lineales	97
Solución de sistemas de desigualdades lineales	97
Valor absoluto	
Definición de valor absoluto	100
Solución de ecuaciones con valor absoluto	100
Capítulo 4	
Trigonometría	
La trigonometría	105
Ángulos y Triángulos	
Definición de ángulo	106
Forma de medir los ángulos	106
Clasificación de los ángulos	108
Clasificación de los triángulos de acuerdo a sus ángulos internos	108
Perímetro de un triángulo	109
Área de un triángulo	109
Ángulos internos de un triángulo	112
Ángulos internos de un triángulo	113
Triángulos semejantes	114
Los grados es una unidad de medición sexagesimal	116

Triángulos Rectángulos	
Notación de los triángulos rectángulos	119
Teorema de Pitágoras	
Enunciado del teorema de Pitágoras	120
Demostración del teorema de Pitágoras utilizando el material didáctico	121
Funciones Trigonométricas	
Definición de función trigonométrica	124
Triángulos amigables	125
Función seno	125
Construcción de la tabla de la función seno	126
Operación inversa de la función seno	127
Tabla de valores de la función seno	128
Función coseno	130
Relación entre la función seno y la función coseno	130
Construcción de la tabla de la función coseno	131
Comportamiento de las funciones seno y coseno	132
Gráfica de las funciones seno y coseno	132
Operación inversa de la función coseno	132
Algunas relaciones entre las funciones seno y coseno	135
Función tangente	137
Función tangente	139
La división entre cero no existe	139
Gráfica de la función tangente	140
Gráfica de la función tangente	140
Operación inversa de la función tangente	140
Las funciones cosecante, secante y cotangente	143
Gráfica de las funciones cosecante, secante y cotangente	144
Relación entre las funciones tangente, cosecante, secante y cotangente	146
Tabla de las funciones seno, coseno y tangente	148
Letras del alfabeto griego	150
Apéndice 1	
Respuestas de los Ejercicios	
Capítulo 1	153
Capítulo 2	156
Capítulo 3	157
Capítulo 4	158
Apéndice 2	
Teorema de Pitágoras	
Primera demostración	163
Segunda demostración	165
Tercera demostración	167
Cuarta demostración	169
Quinta demostración	171
Funciones Trigonométricas	
Círculo de radio uno	173
Tabla de las funciones seno, coseno y tangente	175
Gráfica de las funciones seno, coseno y tangente	177

Introducción

La pedagogía de la espiral ascendente de las matemáticas

Este libro de texto ha sido elaborado utilizando la *Pedagogía de la Espiral Ascendente* para la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas.

Esta pedagogía tiene como marco filosófico referencial una filosofía humanista, es decir, tiene como único objetivo promover las capacidades que identifican a un ser como humano: la imaginación, la inteligencia, la creatividad, la libertad, etcétera.

Por lo cual, el plan estratégico de este libro ha sido diseñado pensando únicamente en la promoción humana de los estudiantes que ahora transitan por los salones de clase.

Esta metodología pedagógica consiste en un proceso de cinco pasos que se repiten cada vez que introducimos un nuevo concepto matemático. En nuestra página de Internet se encuentra una explicación detallada de esta novedosa metodología.

La estrategia pedagógica consiste en cinco pasos

1. Contextualizar el conocimiento

Se define claramente qué concepto matemático vamos a estudiar y se coloca sobre la espiral ascendente del conocimiento, es decir, consiste en verificar que el estudiante se ha apropiado ya de los conceptos previos necesarios para saber con precisión cuál será el siguiente concepto que estudiaremos, ya que los conceptos no son entes aislados que aparecen de repente, sino que son como ladrillos que para formar una barda se colocan para soportar a los que estarán encima de ellos.

2. Experimentar una realidad sensible utilizando los sentidos para permitirle al estudiante entender el concepto

A través de una estrategia pedagógica adecuada, el estudiante utiliza sus sentidos: debe tocar, ver, oír, oler o gustar el concepto para que al extraer datos inquiera e imagine, y así pueda captar la unidad inteligible de esos datos y, por lo tanto, los entienda.

Usando la geometría como hilo conductor en el estudio de las matemáticas hemos podido utilizar imágenes y material didáctico manipulable para la apropiación de los principales conceptos de las matemáticas.

3. Demostrar o verificar que lo entendido es cierto

Cuando el alumno logra entender y, por lo tanto, puede formular con sus propias palabras el concepto, entonces se pregunta si lo que entendió es verdadero. Cuando el estudiante utiliza el conocimiento matemático que hasta este momento ha adquirido, demuestra el concepto y llega a la comprensión total.

4. Aplicar el conocimiento adquirido y desarrollar la habilidad de usarlo en la solución de diferentes tipos de problemas.

Al aplicar el conocimiento, el alumno desarrolla o crea el algoritmo que le permite realizar operaciones o resolver problemas en forma ordenada y eficiente. Sin embargo, no basta sólo con que el alumno deduzca el algoritmo correspondiente sino que también es indispensable que desarrolle la habilidad y acumule la experiencia necesaria para el planteamiento y resolución de ese tipo de problemas.

5. Evaluar lo aprendido y la forma como fue aprendido

La evaluación se hace en dos sentidos. Primero se verifica si el estudiante se apropió del concepto matemático estudiado, así como desarrolló la habilidad y acumuló la experiencia necesaria en el planteamiento y resolución de problemas. Después se debe evaluar la forma en la cual hemos expuesto al alumno al concepto, es decir, nuestro propio trabajo como maestros.

Material didáctico Mathematiké

El material didáctico Mathematiké ayuda a los estudiantes a aplicar sus sentidos para que en forma sencilla, amena y divertida entiendan y demuestren el concepto que estudian.

El uso continuo de los juegos, posibilita a los alumnos a desarrollar la habilidad en la aplicación de los conceptos

Objetivo del libro

El objetivo de este libro, es cubrir la segunda parte del noveno nivel de abstracción, en la espiral ascendente del conocimiento matemático. En este nivel, aplicamos los conceptos de potencias, polinomios y fracciones algebraicas, así como también la factorización y los productos notables.

Estudiamos con detenimiento la gráfica de una ecuación, para que aplicando este conocimiento, nos apropiemos del concepto de sistemas de ecuaciones.

Utilizando las herramientas algebraicas adquiridas, resolvemos desigualdades, sistemas de desigualdades lineales y ecuaciones con valor absoluto.

La última parte del libro, consiste en el estudio de la trigonometría básica, que comprende los ángulos y triángulos, el teorema de Pitágoras y las funciones trigonométricas.

Cómo está organizado el libro

El libro ha sido organizado por conceptos, niveles de abstracción y aplicaciones de los conceptos.

Álgebra básica. Noveno nivel de abstracción

Capítulo 1.

Concepto de ecuación y estrategias algebraicas para resolver ecuaciones de primero y segundo grado. Problemas de aplicación. La gráfica de una ecuación.

Capítulo 2.

Sistemas de ecuaciones de dos y tres variables. Solución de sistemas de ecuaciones lineales de dos y tres ecuaciones. Problemas de aplicación.

Capítulo 3.

El concepto de desigualdad y los diferentes tipos de notación utilizados en las desigualdades. Solución de sistemas de desigualdades lineales y ecuaciones con valor absoluto. Problemas de aplicación.

Trigonometría.

Capítulo 4.

Ángulos y triángulos. Triángulos rectángulos. El teorema de Pitágoras y las funciones trigonométricas. Problemas de aplicación.

Niveles en la apropiación del conocimiento matemático

La Pedagogía de la Espiral Ascendente del Conocimiento para la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, propone que el alumno vaya consolidando niveles de abstracción y el desarrollo de las habilidades que el nivel requiere.

Para que los estudiantes vayan penetrando en el fascinante mundo de la abstracción matemática, sin dar brincos y gozando el conocimiento que van adquiriendo, recomendamos fuertemente, no pasar al siguiente nivel de abstracción hasta que el maestro ya ha verificado que los alumnos están preparados para hacerlo.

Nuestra página en Internet

Con el objeto de tener una vía de comunicación directa entre los maestros, los alumnos y el grupo de investigadores que hacemos esta propuesta educativa, el proyecto de investigación en la enseñanza de las matemáticas *Mathematiké* tiene una página en el internet: www.mathematike.org.

En este sitio, presentamos con mucho más detalle la Pedagogía de la Espiral Ascendente del Conocimiento, la lista completa y actualizada del material didáctico y de los libros de texto y de trabajo. Es nuestro compromiso mantener siempre al día nuestra propuesta educativa, por lo cual, la comunicación con ustedes los maestros, nos es de vital importancia.