

# Álgebra 4

Edición Especial  
2021

José Luis Moreno Aranda



# **Álgebra 4**

## **Edición Especial**

Décimo y Undécimo Niveles de Abstracción

José Luis Moreno Aranda

Grupo Mathematiké, SA de CV

Prohibido Reproducir

Todos los Derechos Reservados

Impreso en México

2021

# Contenido

## Introducción

Pedagogía de los cinco pasos	ix
Niveles en la apropiación del conocimiento matemático	x
Material didáctico Mathematiké	x
Objetivo del libro	x
Nuestra página en Internet	x

## Capítulo 1

### Teorema de Newton o Teorema Binomial

Definición de un binomio elevado a la potencia $n$	13
Desarrollo de un binomio aplicando la ley distributiva	13
Los coeficientes de un binomio a la potencia $n$ . El triángulo de Pascal	14
Los coeficientes de un binomio a la potencia $n$ usando el triángulo de Pascal	14
Desarrollo de un algoritmo para calcular los coeficientes de un binomio a la potencia $n$	15
Factorial de un número	16
Operaciones con factorial	16
Algoritmo para encontrar los coeficientes de $(a + b)^n$ usando la notación de factorial	17
Algoritmo para encontrar los exponentes de $(a + b)^n$ usando la notación de factorial	17
Fórmula para encontrar el término $r$ ( $T_r$ ) de $(a + b)^n$	18
Sumatoria	19
Algoritmo para desarrollar el binomio $(a + b)^n$ usando la notación de sumatoria	19

### Diferencia de Dos Términos

#### Elevados a la Potencia $n$

Desarrollo del algoritmo para calcular la diferencia de dos términos elevados a la potencia $n$	21
---	----

## Capítulo 2

### Ecuaciones

Concepto de ecuación	25
Solución o raíz de una ecuación	25
Clasificación de las ecuaciones según el máximo exponente de su incógnita	26

### Ecuaciones de Primer Grado o Lineales

Definición de ecuación de primer grado	27
Solución o raíz	27
Ecuaciones lineales sin solución	27
Ecuaciones lineales que son identidades	27
Ecuaciones lineales con solución	28
Problemas de aplicación de ecuaciones lineales	30

### Ecuaciones de Segundo Grado

Definición de ecuación de segundo grado o cuadrática	39
Teorema del factor cero	39
Solución o raíces de una ecuación de segundo grado	39
Todas las ecuaciones de segundo grado se resuelven por factorización	40
Casos para la solución de una ecuación de segundo grado	40

Solución de una ecuación de segundo grado sin término independiente	40
Solución de una ecuación de segundo grado sin término lineal	41
Solución de una ecuación de segundo grado cuando la ecuación puede factorizarse en dos binomios	42
Solución de una ecuación de segundo grado completando el cuadrado para poder factorizarla	44
Solución de una ecuación de segundo grado usando la fórmula general	47
Problemas de aplicación de ecuaciones de segundo grado	49
<b>Números Complejos</b>	
Los números complejos	52
La unidad imaginaria	52
Los números imaginarios	52
Los números complejos y sus conjugados	53
Operaciones con números complejos	53
Suma de números complejos	53
Multiplicación de números complejos	53
División de números complejos	54
Propiedades de los números complejos	54
Ecuaciones cuadráticas cuyas raíces son complejas	55
<b>Capítulo 3</b>	
<b>Sistemas de Ecuaciones</b>	
Definición de un sistema de ecuaciones	59
Solución de un sistema de ecuaciones	59
Solución algebraica de un sistema de ecuaciones	60
Método de sustitución para resolver sistemas de ecuaciones	62
<b>Sistemas de Ecuaciones Lineales</b>	
Definición de un sistema de ecuaciones lineales	63
Condición necesaria para que un sistema de ecuaciones lineales tenga solución única	63
Sistemas de ecuaciones lineales equivalentes	64
Teorema de los sistemas equivalentes	65
Métodos de eliminación e igualación para resolver sistemas de ecuaciones lineales y no lineales	66
Definición de sistemas de ecuaciones lineales con dos variables	68
Sistemas de ecuaciones lineales en dos variables con un número infinito de soluciones	68
Sistemas de ecuaciones lineales en dos variables sin solución	69
Sistemas de ecuaciones lineales con tres o más incógnitas	70
Sistemas de ecuaciones lineales homogéneos	71
Solución de un sistema lineal homogéneo	71
<b>Capítulo 4</b>	
<b>División de Polinomios</b>	
División de un polinomio entre un monomio	75
División de un polinomio entre un monomio	76
Algoritmo para dividir un polinomio entre otro polinomio	77
División sintética	80
Procedimiento para realizar la división sintética	80
Consideraciones importantes al realizar la división sintética	81
<b>Multiplicación de Fracciones Algebraicas</b>	
Algoritmo de la multiplicación de fracciones	82
<b>División de Fracciones Algebraicas</b>	
División de fracciones	84
División de fracciones combinada con la multiplicación de fracciones	86
<b>Suma de Fracciones Algebraicas</b>	
Suma de fracciones cuando los denominadores son iguales	90
Suma de fracciones cuando los denominadores no son iguales	92
Mínimo común múltiple cuando las expresiones algebraicas no son factorizables	93
Mínimo común múltiple de polinomios cuando las expresiones algebraicas son factorizables	95
Mínimo común múltiple de polinomios cuando las expresiones algebraicas pueden descomponerse en factores	96
Suma de fracciones cuando los denominadores son diferentes	101

Suma de fracciones combinada con división de fracciones	104
Operaciones de expresiones algebraicas combinadas	107

## Capítulo 5

### Ecuaciones Con Valor Absoluto

Definición de valor absoluto	113
------------------------------	-----

### Ecuaciones de Otros Tipos

Ecuaciones que pueden agruparse	115
Ecuaciones que contienen exponentes racionales	116
Ecuaciones que contienen radicales	116
Ecuaciones tipo cuadráticas	118

### Desigualdades

Definición de desigualdad	120
Solución de una desigualdad	120
Propiedades de las desigualdades	120
Notación utilizada en las desigualdades	121
Solución de desigualdades lineales	121
Intervalos de solución	125
Sistemas de desigualdades lineales	125
Desigualdades de cocientes mayores o menores a cero	127
Desigualdades de otros tipos	129
Desigualdades con valor absoluto	135

## Capítulo 6

### Concepto de Función

Funciones trigonométricas	139
Concepto de ecuación y de función	139
Primer aproximación: la función como la relación entre dos conjuntos	139
Segunda aproximación: la función como una igualdad	142
Tercer aproximación: la función como un operador	143
Prueba para verificar si una ecuación es función o relación	144
Definición de función	146
Notación de función	146

### Concepto de Función Inversa

Función inversa	148
Notación de función y función inversa	149
Relación que las gráficas de la función y de su función inversa guardan	150
Prueba para verificar si una función tiene función inversa	153
Criterio para verificar si una función tiene función inversa	153

## Capítulo 7

### Análisis de la Gráfica de Una Ecuación

Gráfica de una ecuación	159
Variables dependientes y variables independientes	159
Sistema coordenado cartesiano	159
Gráfica de una ecuación	161
Tabular y graficar	161
Análisis de la gráfica de una ecuación	162

### La Recta

La ecuación de una gráfica	168
Un punto cualquiera que pertenece a una gráfica	168
Requisitos para que una recta esté determinada	168
Pendiente de una recta	169
Ecuación de una recta	171
Casos especiales de rectas	175
Distancia entre dos puntos	177
Coordenadas del punto medio entre dos puntos	178

Punto $R(x_R, y_R)$ a una distancia $r$ (fracción) entre dos puntos	179
Rectas paralelas	181
Rectas perpendiculares	182
<b>El Círculo</b>	
Definición del círculo	186
Ecuación del círculo con centro en el origen	186
Ecuación del círculo con centro en $C(\alpha, \beta)$	187
Ecuación general del círculo	188
<b>Recta Tangente al Círculo</b>	
Definición de recta tangente al círculo	190
<b>Capítulo 8</b>	
<b>Funciones Trigonómicas</b>	
Un punto en un círculo	195
Análisis de las gráficas de las funciones trigonométricas seno y coseno	198
Funciones trigonométricas inversas seno y coseno	200
Funciones trigonométricas inversas seno y coseno	200
Las funciones seno y coseno son periódicas	201
La frecuencia de las funciones seno y coseno	202
La amplitud de las funciones seno y coseno	203
Mover horizontalmente las funciones seno y coseno	203
Mover verticalmente las funciones seno y coseno	203
Las funciones tipo sinusoidal	204
La función trigonométrica tangente	204
La función trigonométrica inversa tangente	205
Funciones trigonométricas recíprocas	205
Dominio y rango de las funciones trigonométricas	206
<b>Más Identidades Trigonómicas</b>	
Identidades de la suma de ángulos	207
Identidades del ángulo doble	210
Identidades del ángulo mitad	212
<b>Capítulo 9</b>	
<b>Ecuaciones Trigonómicas</b>	
Concepto de ecuación	217
Ecuaciones trigonométricas	217
<b>Apéndice</b>	
Capítulo 1	229
Capítulo 2	232
Capítulo 3	237
Capítulo 4	241
Capítulo 5	249
Capítulo 6	254
Capítulo 7	255
Capítulo 8	259
Capítulo 9	259

# Introducción

Este libro de texto ha sido elaborado utilizando la *Pedagogía de la Espiral Ascendente* para la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas. Esta pedagogía tiene como marco filosófico referencial una filosofía humanista, es decir, tiene como único objetivo promover las capacidades que identifican a un ser como humano: la imaginación, la inteligencia, la creatividad, la libertad, etcétera. Por lo cual, el plan estratégico de este libro ha sido diseñado pensando únicamente en la promoción humana de los estudiantes que ahora transitan por los salones de clase.

Esta pedagogía ha sido enriquecida utilizando la epistemología de Bernard Lonergan.

Esta metodología pedagógica consiste en un proceso de cinco pasos que se repiten cada vez que introducimos un nuevo concepto matemático. En nuestra página de Internet se encuentra una explicación detallada de esta novedosa metodología.

## Pedagogía de los cinco pasos

1. *Contextualizar el conocimiento.*
2. *Experimentar una realidad sensible utilizando los sentidos, para permitirle al estudiante entender el concepto.*
3. *Demostrar o verificar que lo entendido es cierto.*
4. *Aplicar el conocimiento adquirido y desarrollar la habilidad al usarlo en la solución de diferentes tipos de problemas.*

Explicitar claramente qué concepto matemático vamos a estudiar y colocarlo sobre la espiral ascendente del conocimiento. Verificar que el estudiante ya se ha apropiado de los conceptos previos necesarios y saber con precisión cuál será el siguiente concepto que estudiaremos, ya que los conceptos no son entes aislados que aparecen de repente, sino que son como ladrillos, que para poder formar una barda, se colocan para soportar a los que estarán encima de ellos.

A través de una estrategia pedagógica adecuada, el estudiante utilizando sus sentidos, debe tocar, ver, oír, oler o gustar el concepto, para que extrayendo datos inquiera e imagine y así pueda captar la unidad inteligible de esos datos y por lo tanto entender. Usando la geometría como hilo conductor en el estudio de las matemáticas, hemos podido utilizar imágenes y material didáctico manipulable para la apropiación de los principales conceptos de las matemáticas.

Cuando el alumno ha entendido y por lo tanto, ha podido formular con sus propias palabras el concepto, entonces se pregunta si lo que ha entendido es verdadero. El estudiante utilizando el conocimiento matemático que hasta este momento ha adquirido, demuestra el concepto dándose así en él o ella la comprensión total.

Al aplicar el conocimiento, el alumno desarrolla o crea el algoritmo que le permite realizar operaciones o resolver problemas en forma ordenada y eficiente. Sin embargo, no basta sólo con que el alumno construya el algoritmo correspondiente, sino que también, es indispensable que desarrolle la habilidad y acumule la experiencia necesaria para el planteamiento y resolución de ese tipo de problemas.

5. *Evaluar lo aprendido y la forma como fue aprendido.*

La evaluación la hacemos en dos sentidos. Primero, debemos verificar si el estudiante se ha apropiado del concepto matemático estudiado y ha desarrollado la habilidad y acumulado la experiencia necesaria en el planteamiento y resolución de problemas. Después, debemos evaluar la forma en la cual hemos expuesto al alumno al concepto, es decir, nuestro propio trabajo como maestros.

## Niveles en la apropiación del conocimiento matemático

La Pedagogía de la Espiral Ascendente del Conocimiento para la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, propone que el alumno vaya consolidando niveles de abstracción y el desarrollo de las habilidades que el nivel requiere.

Para que los estudiantes vayan penetrando en el fascinante mundo de la abstracción matemática, sin dar brincos y gozando el conocimiento que van adquiriendo, recomendamos fuertemente, no pasar al siguiente nivel de abstracción hasta que el maestro ya ha verificado que los alumnos están preparados para hacerlo.

## Material didáctico Mathematiké

El material didáctico Mathematiké ayuda a los estudiantes a aplicar sus sentidos para que en forma sencilla, amena y divertida entiendan y demuestren el concepto que estudian.

El uso continuo de los juegos, posibilita a los alumnos a desarrollar la habilidad en la aplicación de los conceptos.

## Objetivo del libro

El libro comprende los conceptos, algoritmos y aplicaciones del álgebra intermedia que todo estudiante debe saber antes de iniciar el estudio del cálculo diferencial e integral. Hacemos un recorrido de las ecuaciones de primer grado. Introducimos el concepto de números imaginarios y complejos. Resolvemos todas las ecuaciones de segundo grado usando factorización y la fórmula general.

Abordamos el concepto de función, usando la estrategia pedagógica de las aproximaciones al concepto. Utilizando el concepto de función, construimos las funciones trigonométricas, las igualdades trigonométricas y sus aplicaciones en las ecuaciones trigonométricas.

## Nuestra página en Internet

Con el objeto de tener una vía de comunicación directa entre los maestros, los alumnos y el grupo de investigadores que hacemos esta propuesta educativa, el proyecto de investigación en la enseñanza de las matemáticas *Mathematiké* tiene una página en el internet: [www.mathematike.org](http://www.mathematike.org)

En este sitio presentamos con más detalle la pedagogía de San Ignacio, así como la lista completa y actualizada del material didáctico y de los libros de texto y de trabajo. Es nuestro compromiso mantener siempre al día nuestra propuesta educativa, por lo que la comunicación con ustedes los maestros y alumnos es de vital importancia.